

TEMA: LA PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA

MAGNITUD: Todo lo que puede ser medido

CANTIDAD: Una porción de magnitud

UNIDAD: Una porción de magnitud que se toma como referencia para determinar una cantidad

MEDIDA DE UNA MAGNITUD: Es el número de veces que una cantidad contiene a la unidad

ACTIVIDADES

- 1.- Da tres ejemplos de algo que sea magnitud y otros tres ejemplos de algo que no sea magnitud
- 2.- En las tres magnitudes que has puesto como ejemplo indica una cantidad, una unidad y expresa una medida
- 4.- Copia las palabras siguientes en tu cuaderno y escribe al lado de cada una si son magnitudes o no lo son:
temperatura, precio, lástima, peso, olor, velocidad, profundidad
- 5.- Di una unidad para cada magnitud del ejemplo anterior

RAZÓN: Es un cociente indicado de dos números

$\frac{a}{b}$ - es la razón entre el número a y el número b
- se lee a es a b
- a es el antecedente y b el consecuente

Una razón no es lo mismo que una fracción: Los términos de una razón pueden ser números decimales, los de una fracción sólo pueden ser números enteros

RAZÓN: Es el cociente entre dos cantidades de dos magnitudes

LONGITUD (m)	1	2	3	4
PRECIO (€)	3	6	9	12

PROPORCIÓN: Es la igualdad entre razones

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ - es una proporción (igualdad de dos razones)
- se lee a es a b como c es a d

Términos de una proporción

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ - a es el **primer término**, b es el **segundo**, c es el **tercero** y d el **cuarto**
- a y c son los **antecedentes**; b y d los **consecuentes**
- a y d los **extremos**; b y c los **medios**

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES

“En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos”

$$\frac{250}{1} = \frac{500}{2} \Rightarrow 250 \cdot 2 = 500 \cdot 1 \quad \Bigg| \quad \frac{750}{3} = \frac{1.000}{4} \Rightarrow 750 \cdot 4 = 1.000 \cdot 3$$

En general $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

1ª) CAMBIO DE MEDIOS: Si se cambian entre sí los medios resulta una nueva proporción

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow 4 \cdot 6 = 3 \cdot 8 \quad \Bigg| \quad \frac{4}{8} = \frac{3}{6} \Rightarrow 4 \cdot 6 = 8 \cdot 3$$

2ª) CAMBIO DE EXTREMOS: Si se cambian entre sí los extremos de una proporción resulta una nueva proporción

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow 4 \cdot 6 = 3 \cdot 8 \quad \Bigg| \quad \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \Rightarrow 6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$$

3ª) CAMBIO DE EXTREMOS Y DE MEDIOS: Si se cambian entre sí los medios y los extremos de una proporción resulta una nueva proporción

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow 4 \cdot 6 = 3 \cdot 8 \quad \Bigg| \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$$

4ª) SUMA DE ANTECEDENTES Y SUMA DE CONSECUENTES: La suma de los antecedentes entre la suma de los consecuentes origina una razón que es proporcional con las anteriores. La suma de los antecedentes entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \quad \text{sumamos los antecedentes} \quad 4 + 8 = 12$$

$$\text{sumamos los consecuentes} \quad 3 + 6 = 9$$

$$\text{la razón } \frac{12}{9} \text{ forma proporción con } \frac{4}{3} \text{ y con } \frac{8}{6} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9}$$

5ª) * SUMA/RESTA DE CONSECUENTES: Si en una proporción a cada antecedente le sumamos o restamos su consecuente obtenemos otra proporción

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sumamos a cada antecedente su consecuente} \quad \frac{4}{4+3} = \frac{8}{8+6} \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{8}{14} \\ \text{restamos a cada antecedente su consecuente} \quad \frac{4}{4-3} = \frac{8}{8-6} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{8}{2} \end{array} \right.$$

*** SUMA/RESTA DE ANTECEDENTES:** Si en una proporción a cada consecuente le sumamos o restamos su antecedente obtenemos otra proporción

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sumamos a cada consecuente su antecedente} \quad \frac{3+4}{3} = \frac{6+8}{6} \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{14}{6} \\ \text{restamos a cada consecuente su antecedente} \quad \frac{3-4}{3} = \frac{6-8}{6} \Rightarrow \frac{-1}{3} = \frac{-2}{6} \end{array} \right.$$

ACTIVIDADES

6.- Comprueba si las expresiones siguientes forman proporción:

$$\frac{5}{10} = \frac{2}{4} ; \frac{5}{20} = \frac{1}{4} ; \frac{10}{20} = \frac{1}{2} ; \frac{250}{1} = \frac{500}{2} ; \frac{750}{4} = \frac{1000}{3}$$

7.- En las proporciones siguientes escribe cuáles son los antecedentes y cuáles los consecuentes.

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} ; \frac{5}{9} = \frac{10}{18} ; \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

8.- Escribe cuáles son los extremos y cuáles los medios en las tres proporciones del ejercicio anterior.

9.- Escribe de todas las formas posibles la siguientes proporciones:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

10.- Aplica las propiedades de las proporciones a la siguiente proporción y comprueba si el resultado obtenido en cada caso forma una nueva proporción

$$\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$$

11.- En la proporción $\frac{x}{3} = \frac{y}{6}$; x e y son dos números desconocidos. Si sabes que $x + y = 27$, halla el valor de ambos.

12.- En la proporción $\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$; x e y son dos números desconocidos. Si sabes que $x + y = 24$, halla el valor de ambos.

HALLAR LOS TÉRMINOS DE UNA PROPORCIÓN

a) **CUARTA PROPORCIONAL:** Es hallar un término en una proporción

- un extremo es igual al producto de los medios entre el otro extremo

- un medio es igual al producto de los extremos entre el otro medio

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a = \frac{b \cdot c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow c = \frac{a \cdot d}{b}$$

b) **MEDIA PROPORCIONAL:** Es hallar los medios en una proporción continua

PROPORCIÓN CONTINUA: Es la que tiene los dos medios iguales

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{d} \Rightarrow m^2 = a \cdot d \Rightarrow m = \sqrt{a \cdot d}$$

Ej.: Halla la media proporcional de 49 y 4

$$\frac{49}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 49 \cdot 4 \Rightarrow x = \sqrt{49 \cdot 4} \Rightarrow x = \sqrt{196} \Rightarrow x = 14$$

c) **TERCERA PROPORCIONAL:** Es hallar un extremo en una proporción continua

Ej.: Hallar la tercera proporcional de 8 y 4

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 4}{8} \Rightarrow x = \frac{16}{8} \Rightarrow x = 2$$

ACTIVIDADES

13.- Busca el término que falta en las proporciones:

$$\frac{4}{3} = \frac{a}{6} ; \frac{5}{9} = \frac{10}{b} ; \frac{c}{5} = \frac{6}{15}$$

14.- Halla el valor de x en las siguientes proporciones:

$$\frac{49}{x} = \frac{x}{4} ; \frac{16}{x} = \frac{x}{4} ; \frac{32}{x} = \frac{x}{8} ; \frac{121}{x} = \frac{x}{4}$$

15.- Escribe una proporción continua con los términos 5, 10 y 20

16.- Halla la media proporcional de:

16 y 4 ; 32 y 8 ; 121 y 4 ; 9 y 16

17.- Halla la tercera proporcional de:

5 y 15 ; 12 y 6 ; 56 y 84 ; 5 y 10

18.- Halla el valor de x en cada una de las siguientes proporciones:

$$\frac{42}{35} = \frac{6}{x} ; \quad \frac{x}{7} = \frac{9}{21} ; \quad \frac{3}{x} = \frac{45}{30} ; \quad \frac{2}{8} = \frac{x}{64}$$

19.- a) Comprueba que la cuarta proporcional de 3, 6 y 5 es 10

b) ¿Puede ser 5 cuarta proporcional de los números 5, 3 y 4?

c) Halla la cuarta proporcional a los números 7, 5 y 28

20.-a) Escribe una proporción continua con los números 8, 16 y 32

b) Escribe una proporción continua con los números 5, 10 y 20

21.- a) Calcula la media proporcional de 4 y 9

b) Halla la media proporcional de 25 y 4

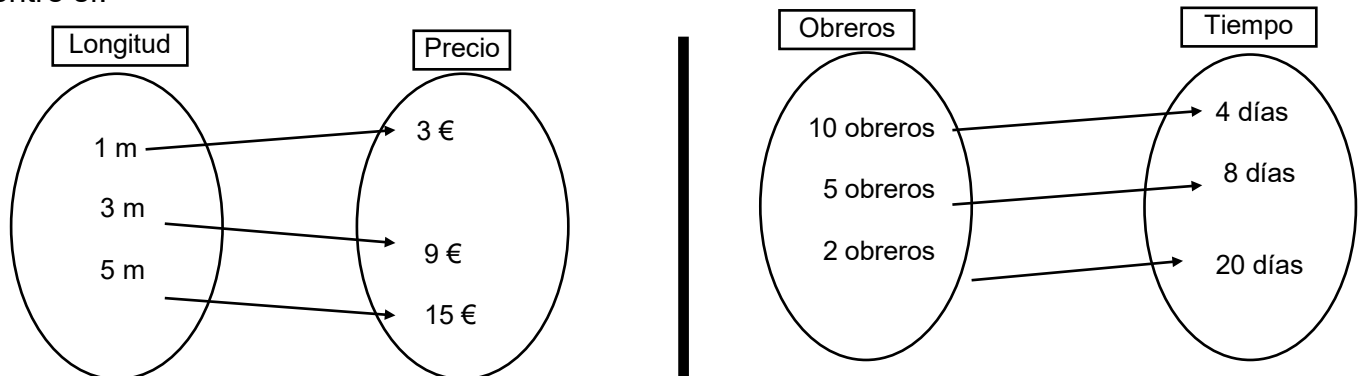
22.- a) Halla la tercera proporcional de 5 y 15

b) Halla la tercera proporcional de 56 y 84

c) Halla la tercera proporcional de 5 y 10

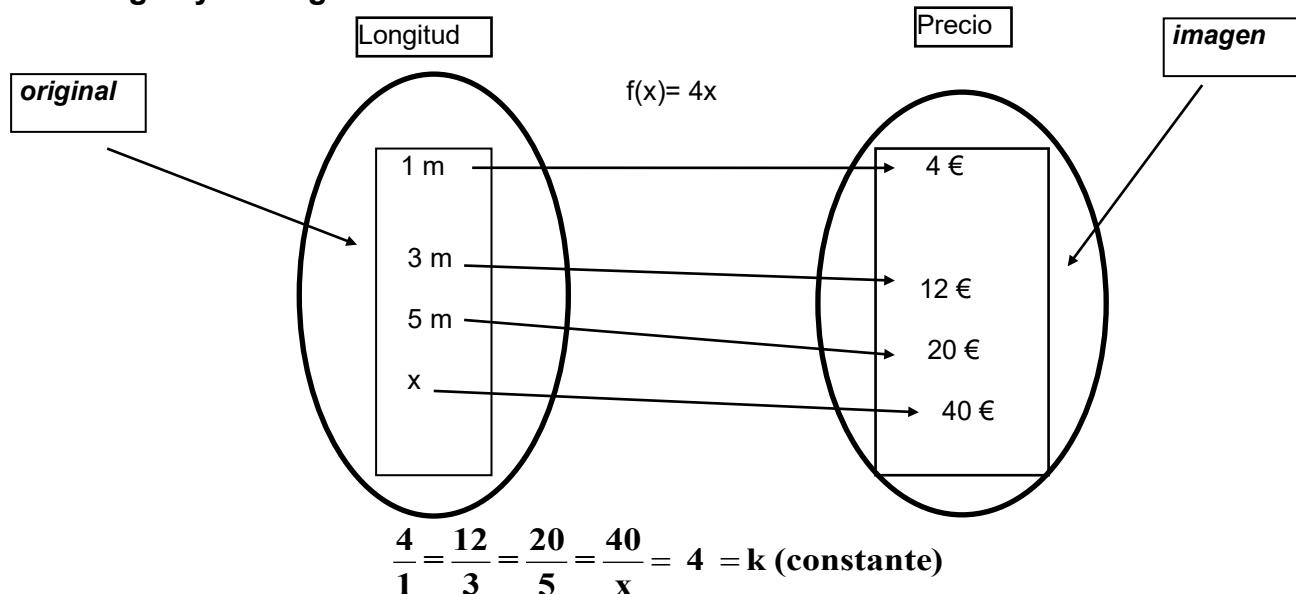
PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

RELACIONES ENTRE MAGNITUDES: Las cantidades de dos magnitudes se pueden relacionar entre sí.



PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos magnitudes son directamente proporcionales si se mantiene constante el cociente entre cada imagen y su original

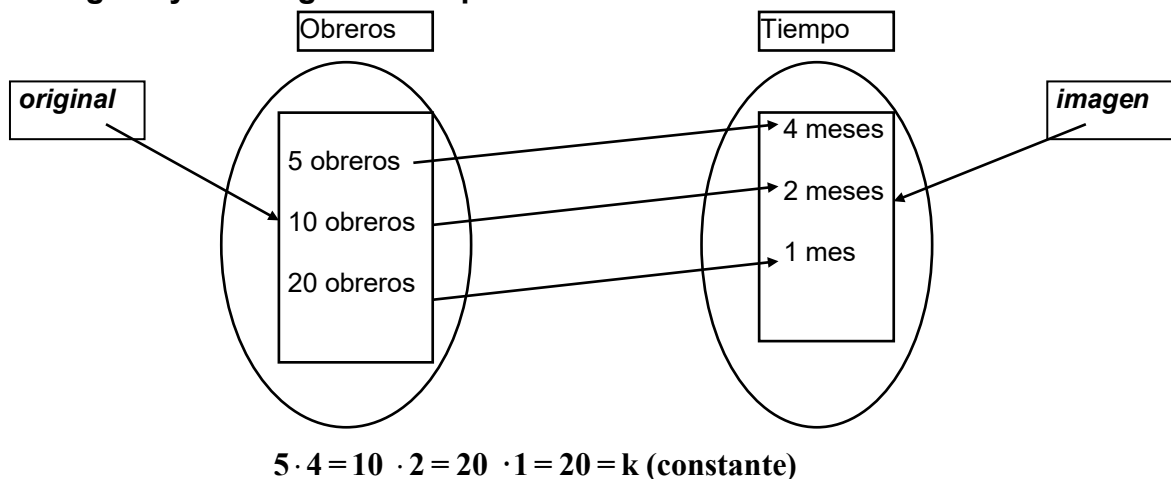


MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

- * Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar una cantidad de una magnitud por un número la cantidad correspondiente en la otra magnitud también queda multiplicada por dicho número
- * Dos magnitudes son directamente proporcionales si al dividir una cantidad de una magnitud por un número la cantidad correspondiente en la otra magnitud también queda dividida por dicho número

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si se mantiene constante el producto entre cada original y su imagen correspondiente



MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

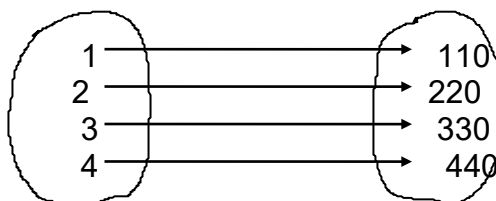
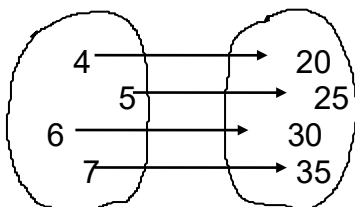
- * Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar una cantidad de una magnitud por un número la cantidad correspondiente en la otra magnitud queda dividida por dicho número
- * Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al dividir una cantidad de una magnitud por un número la cantidad correspondiente en la otra magnitud queda multiplicada por dicho número

ACTIVIDADES

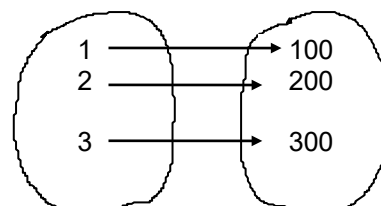
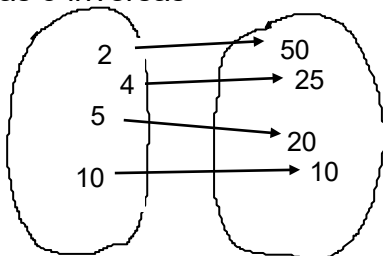
23.- Comprueba si es proporcionalidad directa o inversa

- número de kilos de naranjas precio de su compra
- número de kilos de naranjas y zumo que se puede obtener
- número de naranjas en un kilo y peso de cada naranja

24.- ¿Son proporcionales las magnitudes que se han relacionado? ¿De qué tipo? Razona la respuesta



25.- Comprueba si se mantienen los cocientes o los productos en las relaciones siguientes para ver si son directas o inversas



26.- Comprueba si las magnitudes siguientes son directa o inversamente proporcionales:

- Cantidad de trabajo realizado y número de obreros
- Tiempo empleado en un trabajo y número de obreros
- Distancia en kilómetros y tiempo empleado
- Peso de un melón y precio

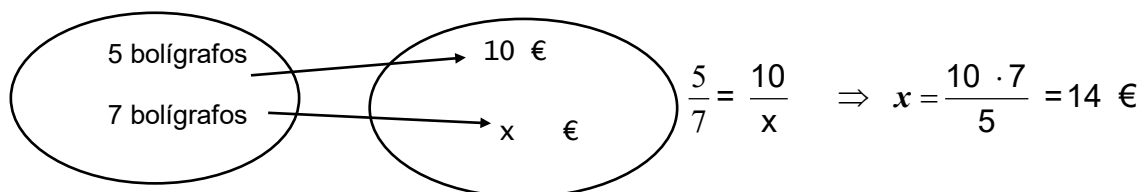
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD

A.- REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

La regla de tres simple directa se emplea para conocer un término en una proporción entre dos magnitudes directamente proporcionales

Para resolver una regla de tres simple directa se plantea como una proporción en la que falta un término. Ese término se halla determinando la cuarta proporcional.

Ej.: Cinco bolígrafos cuestan 1 € . ¿Cuánto cuestan 7 bolígrafos?



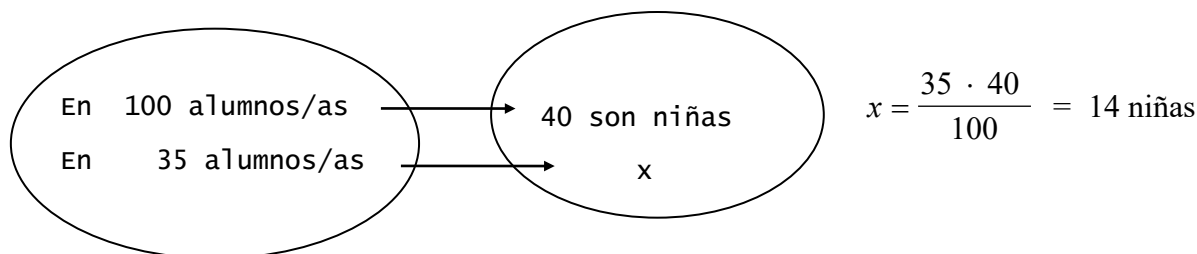
B.- PORCENTAJES O TANTOS POR CIENTO

El porcentaje o tanto por ciento es el valor que se corresponde con el valor 100 en una proporción entre dos magnitudes directamente proporcionales.

El tanto por ciento de una cantidad se calcula:

- multiplicando la cantidad por el porcentaje dado
- dividiendo el resultado por 100

Ej.: En una clase de 35 alumnos/as el 40 % de ellos son niñas ¿Cuántas niñas hay?



C.- REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

En ocasiones hay que repartir una cantidad en partes directamente proporcionales a otras cantidades dadas. A esto se le llama reparto directamente proporcional.

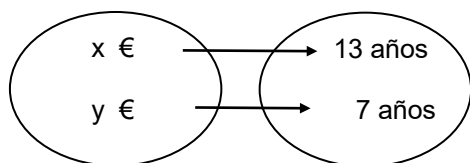
Para resolver los problemas de repartos empleamos la propiedad de las proporciones que dice:
“La suma de los antecedentes entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones”

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$$

Ej.: Se reparten 1.500 € entre 2 hermanos de 13 y 17 años de forma que correspondan cantidades proporcionales a su edad

x = € que corresponden al hermano de 13 años

y = € que corresponden al hermano de 17 años



$$x + y = 1.500$$

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{7} = \frac{x + y}{13 + 7}$$

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{7} = \frac{1.500}{20}$$

(a partir de esta proporción hallamos x e y)

$$\frac{x}{13} = \frac{1.500}{20} \Rightarrow x = \frac{13 \cdot 1.500}{20} = 975 \text{ € recibe el de 13 años}$$

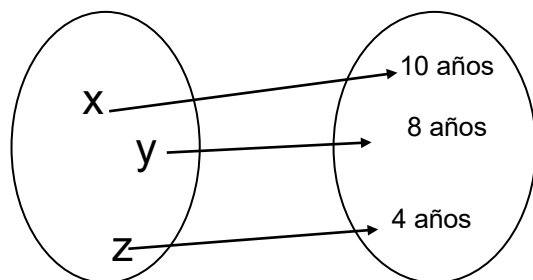
$$\frac{y}{7} = \frac{1.500}{20} \Rightarrow y = \frac{7 \cdot 1.500}{20} = 525 \text{ € recibe el de 7 años}$$

Ej.: Repartir proporcionalmente 11 bombones entre 3 hermanos de 10, 8 y 4 años

x = bombones que recibe el de 10 años

y = bombones que recibe el de 8 años

z = bombones que recibe el de 4 años



$$x + y + z = 11$$

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{8} = \frac{z}{4} = \frac{x + y + z}{10 + 8 + 4}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{8} = \frac{z}{4} = \frac{11}{22}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{11}{22} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 11}{22} = 5 \text{ bombones el de 10 años}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{11}{22} \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 11}{22} = 4 \text{ bombones el de 8 años}$$

$$\frac{z}{4} = \frac{11}{22} \Rightarrow z = \frac{4 \cdot 11}{22} = 2 \text{ bombones el de 4 años}$$

ACTIVIDADES

27.- Un ciclista recorre en 3 horas una distancia de 90 km a velocidad constante ¿Qué tiempo tardará en recorrer 30 km?

28.- Un automóvil gasta 4,5 € de gasolina cada 100 km ¿Cuántos gastará en 532 km?

29.- Un obrero ha ganado 378 € trabajando 6 días ¿Cuántos días debe trabajar para ganar 204 €?

30.- Tres kilos de café costaron 9 €. ¿Cuántos kilos de café se pueden comprar con 7 €?

31.- Cinco tornillos cuestan 0,02 €. ¿Cuántos tornillos se pueden comprar con 0,18 €?

32.- En un pueblo de 5.500 habitantes hay 3.025 mujeres ¿Qué tanto por ciento hay de mujeres?

33.- Calcula el 16 % del número 80.000

34.- Al comprar un coche que cuesta 16.000 € hay que pagar un 20 % de impuesto de lujo ¿Cuánto hay que pagar en total para comprar ese coche?

35.- Un vendedor cobró por 10 kg de café 5,5 €. Si el beneficio que obtuvo fue el 20 % ¿cuánto dinero ganó?

36.- El 8 % de un número es 1.600 ¿Cuál es ese número?

37.- En las proporciones siguientes forma la razón de la suma de los antecedentes partida por la suma de los consecuentes:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{2}{4} \quad ; \quad \frac{1}{9} = \frac{3}{27} = \frac{2}{18} \quad ; \quad \frac{5}{30} = \frac{2}{12} \quad ; \quad \frac{2}{3} = \frac{12}{18} = \frac{8}{12}$$

38.- Repartir 80 en partes directamente proporcionales a 3 y 7

39.- Reparte 91.871 en partes directamente proporcionales a 10, 12 y 15 años

40.- Un transportista tiene 120.000 € para pagar a tres agricultores a los que compró, respectivamente, 400, 600 y 500 kg de una mercancía ¿Cuánto debe pagar a cada agricultor?

41.- Se desea construir un nuevo estadio de fútbol:

- De los siguientes pares de magnitudes ¿Cuáles son directamente proporcionales?
 - horas trabajadas y trabajo realizado
 - horas trabajadas y duración de la obra
 - horas trabajadas y salario recibido
- El estadio tenía capacidad para 12.500 espectadores repartidos en 10 filas de igual número de butacas. ¿Cuántas filas se deben añadir para que la capacidad sea de 45.000 espectadores?
- Si cada día se construye $\frac{1}{6}$ del total ¿Cuántos días se tardará en concluir el trabajo?
- Se contrataron tres equipos. El primero realizó $\frac{1}{3}$ del trabajo, el segundo $\frac{1}{5}$ y el tercero $\frac{7}{15}$ del trabajo. Si en total se pagaron 57 millones de pesetas. ¿Cuánto le dieron a cada equipo si el reparto fue proporcional al trabajo realizado?
- Calcula, con los resultados del ejercicio anterior, el tanto por ciento que le correspondió a cada equipo
- El 45 % del presupuesto general de la obra se lo llevaron los equipos contratados ¿A cuánto ascendía el presupuesto general?

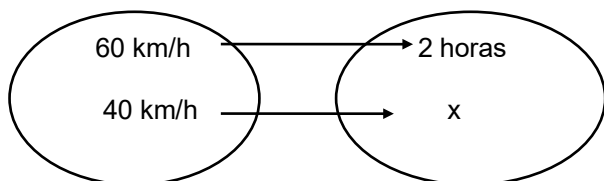
PROPORCIONALIDAD INVERSA

Recuerda que en la proporcionalidad inversa si una cantidad de una magnitud se multiplica por un número, su correspondiente en la otra magnitud queda dividida por dicho número y viceversa.

REGLA DE TRES INVERSA

La regla de tres inversa se plantea como la directa pero antes de resolver se invierte una de las razones.

Ej.: En recorrer una distancia se tardan 2 horas a 60 km/h ¿Cuánto se tardará a 40 km/h?



Si es inversamente proporcional debe cumplirse
que: $60 \cdot 2 = 40 \cdot x \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 2}{40} = 3 \text{ horas}$

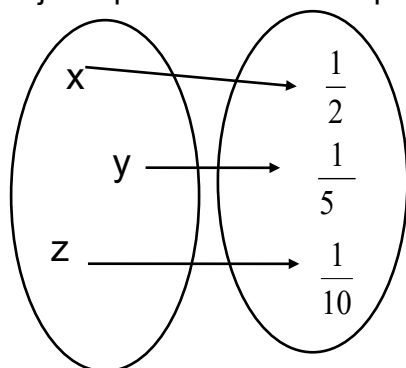
Si resolvemos el problema empleando proporciones resultaría:

$$\frac{60}{40} = \frac{x}{2} \text{ (hemos invertido la segunda razón)} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 2}{40} = 3 \text{ horas}$$

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Repartir un número N en partes inversamente proporcionales a tres números, por ejemplo x, y y z es repartirlo en partes directamente proporcionales a las fracciones $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$

Ej.: Repartir 20.000 € en partes inversamente proporcionales a 2, 5 y 10



$$x + y + z = 20.000$$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{x + y + z}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = \frac{20.000}{\frac{5 + 2 + 1}{10}}$$

$$2x = 5y = 10z = \frac{20.000}{\frac{8}{10}}$$

$$2x = 5y = 10z = \frac{200.000}{8} = 25.000$$

$$2x = 25.000 \Rightarrow x = \frac{25.000}{2} = 12.500 \text{ € corresponden a } 2$$

$$5y = 25.000 \Rightarrow y = \frac{25.000}{5} = 5.000 \text{ € corresponden a } 5$$

$$10z = 25.000 \Rightarrow z = \frac{25.000}{10} = 2.500 \text{ € corresponden a } 10$$

Por tanto el reparto inversamente proporcional se reduce a un reparto directamente proporcional a las fracciones $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$

Recuerda que para ello primero debes reducir a común denominador y luego repartir proporcionalmente a los numeradores obtenidos

Ej.: Repartir 170.000 € en partes inversamente proporcionales a 6, 9 y 10

1.- Repartimos de forma directamente proporcional a $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{10}$

a) Reducimos a común denominador: $\frac{15}{90}$, $\frac{10}{90}$ y $\frac{9}{90}$

b) Como las fracciones tienen el mismo denominador se hace el reparto directamente proporcional a los numeradores:

$$x + y + z = 170.000$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{9} = \frac{x + y + z}{15 + 10 + 9} = \frac{170.000}{34} = 5.000$$

$$\frac{x}{15} = 5.000 \Rightarrow x = 15 \cdot 5.000 = 75.000 \text{ € corresponden a } 6$$

$$\frac{y}{10} = 5.000 \Rightarrow y = 10 \cdot 5.000 = 50.000 \text{ € corresponden a } 9$$

$$\frac{z}{9} = 5.000 \Rightarrow z = 9 \cdot 5.000 = 45.000 \text{ € corresponden a } 10$$

ACTIVIDADES

- 42.- Un coche que lleva una velocidad media de 90 km/h tarda 7 horas en recorrer el trayecto Madrid- Barcelona. ¿Cuánto tardará un camión a 40 km/h?
- 43.- Un grifo que arroja 16 litros por minuto emplea 19 horas en llenar un depósito. ¿Qué tiempo emplearía si arrojara 57 litros por minuto?
- 44.- En 20 días 18 obreros hacen un trabajo ¿En cuántos días acabarían si se añaden 6 obreros más?
- 45.- Un automovilista tiene el dinero justo para comprar 45 litros de gasolina a 0,80 €. Si la gasolina sube 0,02 € el litro. ¿Cuántos litros podrá comprar?
- 46.- Trabajando 2 horas diarias he tardado 14 días en hacer un trabajo ¿Cuántas horas tengo que trabajar al día para terminarlo en 10 días?
- 47.- Después de hacer compras por valor de 15 € una persona sólo tiene que pagar 14,60 € ¿Que tanto por ciento le han descontado?
- 48.- Al comprar un televisor a mi padre le han hecho un descuento del 15 % y ha tenido que pagar 7500 € ¿Cuánto costaba el televisor?
- 49.- El 35 % de los habitantes de un país son rubios. Sabiendo que hay 15.315.000 rubios ¿Cuántos habitantes tiene el país?
- 50.- Reparte 162.293 en partes inversamente proporcionales a 2, 6 y 8
- 51.- Se ha repartido un número en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 7. Calcula el número si la primera parte vale 70 y la segunda 84
- 52.- Al repartir una cantidad en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4 a la tercera parte le correspondieron 3.000 € ¿Cuánto les correspondió a las otras partes? ¿Cuánto se repartió?
- 53.- En una carrera de 500 m se reparte un premio de 5.500 € entre los tres primeros atletas de forma inversamente proporcional a los tiempos empleados . ¿Cuánto cobra cada uno si los tiempos empleados han sido 50 seg. el primero, 52 seg el segundo y 54 seg el tercero?
- 54.- Alex ha puesto 150 € en una peña de quinielas, Iñaki ha puesto 120 € y Elena 9 €. Al final de la temporada obtienen 16.000 € de beneficio ¿Cuánto recibe cada uno?

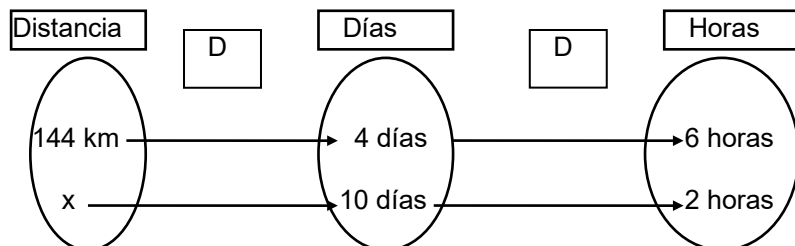
LA PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

La proporcionalidad puede darse entre más de dos magnitudes, en este caso se dice que es compuesta.

REGLA DE TRES COMPUESTA

A) Si todas las magnitudes son directamente proporcionales

Ej.: Un hombre recorre 144 km en 4 días andando 6 horas diarias ¿Cuántos kilómetros recorrerá durante 10 días andando 2 horas diarias?



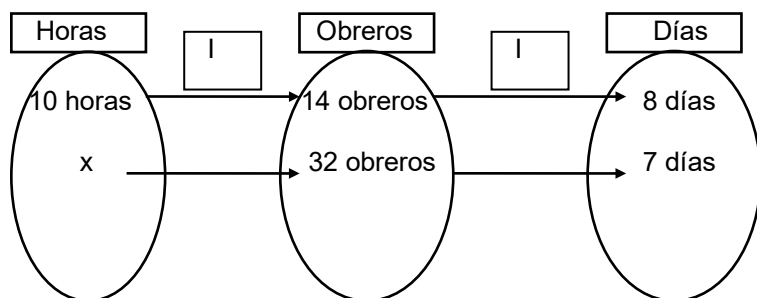
$$\frac{144}{x} = \frac{4}{10} = \frac{6}{2}$$

$$\frac{144}{x} = \frac{4 \cdot 6}{10 \cdot 2}$$

$$x = \frac{144 \cdot 10 \cdot 2}{4 \cdot 6} = 120 \text{ km}$$

B) Si hay alguna magnitud inversamente proporcional

Ej.: Para hacer una casa trabajan 14 obreros durante 8 días, trabajando 10 horas diarias. ¿Cuántas horas trabajarán diariamente 32 obreros para hacer la casa en 7 días?



$$\frac{10}{x} = \frac{32}{14} = \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{10 \cdot 14 \cdot 8}{32 \cdot 7} = 5 \text{ horas}$$

ACTIVIDADES

- 55.- ¿Cuántos días emplea una persona en recorrer 720 km andando 8 horas diarias, si en 15 días ha recorrido 405 km caminando 9 horas diarias?
- 56.- En 3 días 4 obreros trabajando 8 horas diarias hicieron un muro de 48 metros. ¿Cuántos días tardarán 6 obreros trabajando 10 horas diarias en construir un muro de 150 metros?
- 57.- Una tripulación de 250 personas tiene provisiones para 94 días de navegación, siendo la ración por persona y día de 1.200 gr. ¿Cuántos gramos tendrá la ración de las mismas provisiones, si la travesía durara 115 días y la tripulación fuera de 325 hombres?
- 58.- En una contrata trabajan 30 electricistas, durante 12 días a 10 horas diarias colocando 6 km de tendido eléctrico ¿Cuántos días necesitarán 25 electricistas para colocar 15 km de tendido trabajando 8 horas diarias?

INTERES SIMPLE

Cuando se deposita una cantidad de dinero en el banco, al cabo de un tiempo el banco te devuelve:

- la cantidad de dinero depositado

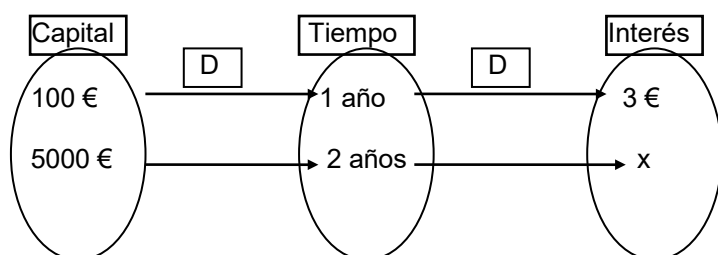
- otra cantidad (llamada interés) que es un tanto por ciento del dinero que se deposita durante un tiempo determinado

En los cálculos de interés simple hay que tener en cuenta:

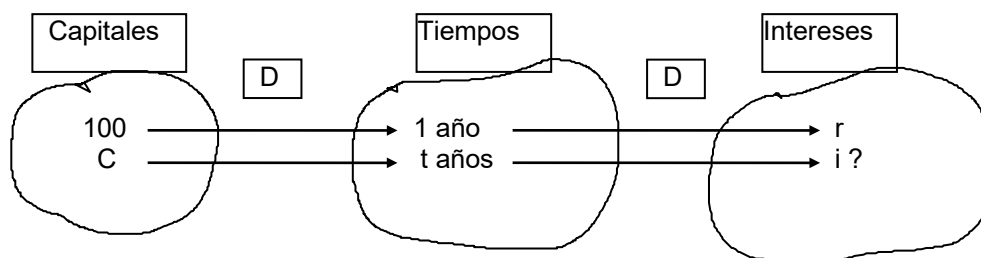
- * **Capital** (C): Es la cantidad de dinero depositado
- * **Interés** (I): Cantidad adicional que produce el dinero depositado
- * **Rédito** (r) : Es el tanto por ciento que aplica el banco al dinero depositado

Para calcular el interés que produce una cantidad de dinero, hay que aplicar la regla de tres compuesta.

Ej.: ¿Qué interés producirá un capital de 5.000 € durante 2 años a un rédito del 3 %?
(Sabemos que 100 € producen 3 € en un año).



Existe una fórmula con la que se puede encontrar siempre el interés. Imagina que el capital es C, el tiempo t años y el rédito es r.



$$\frac{100}{C} = \frac{1}{t} = \frac{r}{i} \Rightarrow i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \text{ (años)}$$

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 12} \text{ (meses)}$$

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 360} \text{ (días)}$$

De la fórmula $i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ se deduce que

$$C = \frac{i \cdot 100}{r \cdot t}$$

$$r = \frac{i \cdot 100}{C \cdot t}$$

$$t = \frac{i \cdot 100}{C \cdot r}$$

ACTIVIDADES

- 59.- En un banco han prestado a mi padre 550.000 € para devolver en 2 años. Si el rédito es del 11,5 % ¿Cuál será el interés? ¿Qué cantidad tendrá que devolver mi padre al banco?
- 60.- ¿Qué interés producen 200.000 € al 6 % en 18 meses?
- 61.- Una empresa posee un capital de 1.500.000 €. Deposita en el banco las $\frac{2}{3}$ partes durante 2 años a un rédito del 5 %. El resto lo deposita durante 6 meses al 4 % ¿Qué intereses obtendrá en total?
- 62.- Una empresa coloca 2.000.000 de € en un banco de la siguiente manera: 1.500.000 € las coloca durante un año a un rédito del 5,5 % . El dinero restante lo coloca durante 6 meses al 4 % ¿Cuánto dinero tendrá al final?
- 63.- Si en un banco se depositaron 48.000 € y el banco devolvió 51.000 € ¿Cuál fue el interés?
- 64.- Si en un banco se depositaron 37.000 € y al cabo de 3 años hay un interés de 4.000 €. ¿Cuál es el capital final?
- 65.- Si el rédito es del 8 % y el capital inicial son 2.000 € ¿Cuál será el interés al cabo de un año?
- 66.- Si un capital ha estado depositado durante 1 año y 5 meses ¿Cuántos días se considera que ha estado depositado?
- 67.- Un capital de 27.000 € al 10 % se ha transformado en 27.675 € ¿Cuánto tiempo estuvo depositado?
- 68.- ¿A qué rédito hay que colocar 18.400 € para obtener 1.771 € de interés en 2 años y 9 meses?
- 69.- Halla el capital que produce un interés de 22.500 € en 45 días si el rédito es del 8 %?
- 70.- Calcula el interés que producen 53.000 € colocadas al 5,5 % el día 6 de agosto y se retiraron el 23 de setiembre del año siguiente

AMPLIACIÓN DE LA PROPORCIONALIDAD

REPARTO PORPOCIONAL COMPUESTO

Consiste en repartir una cantidad proporcionalmente a dos o más grupos de números.

Para ello se reparte **proporcionalmente a sus productos**.

Ej.: Repartir 720.324 ptas. entre tres padres de familia en razón directa al número de sus hijos, 2, 3 y 4 y razón inversa a sus edades, 32, 38 y 50 años

Razonamiento:

Efectuamos los productos

$$2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

$$3 \cdot \frac{1}{38} = \frac{3}{38}$$

$$4 \cdot \frac{1}{50} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

Reducimos a común denominador :

$$\frac{1}{16} ; \frac{3}{38} ; \frac{2}{25} = \frac{475}{7.600} ; \frac{600}{7.600} ; \frac{608}{7.600}$$

: Hacemos el reparto directamente proporcional a los numeradores :

$$475 + 600 + 608 = 1.683$$

$$720.324 : 1.683 = 428$$

$$428 \cdot 475 = 203.300 \text{ ptas corresponden al primero}$$

$$428 \cdot 600 = 256.800 \text{ ptas corresponden al segundo}$$

$$428 \cdot 608 = 260.224 \text{ ptas corresponden al tercero}$$

REGLA DE COMPAÑÍA

La regla de compañía tiene por objeto calcular las ganancias o pérdidas que corresponden a cada uno de los socios de una empresa que han juntado sus capitales para emprender un negocio en común.

Casos:

1º.- Que los capitales y los tiempos sean iguales: En este caso se dividen las ganancias o pérdidas entre el número de socios

Ej.: Cinco socios emprendieron un negocio, aportando todos el mismo capital. Al cabo de un año ganaron 275.000 ptas. Calcula la ganancia de cada uno.

Razonamiento: Como todos aportaron el mismo capital y el tiempo es igual para todos, para solucionar el problema se dividen las ganancias a partes iguales entre el número de socios.

$$275.000 : 5 = 55.000 \text{ ptas corresponden a cada socio}$$

2º.- Que los capitales sean iguales y los tiempos distintos: Se hace un reparto directamente proporcional a los tiempos

Ej.: Una persona emprendió un negocio aportando 50.000 ptas. Seis meses después se le unió otro que aportó el mismo capital y tres meses más tarde se les unió un tercero que puso el mismo dinero. Al cabo de un año de haber emprendido el negocio el primer socio hicieron balance obteniendo unos beneficios de 84.000 ptas. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Razonamiento: El primer socio tuvo invertido su dinero ----- 12 meses

El segundo socio tuvo invertido su dinero ----- 6 meses

El tercer socio tuvo invertido su dinero ----- 3 meses

TOTAL: 21 MESES

$$84.000 : 21 = 4.000 \text{ ptas corresponden por cada mes}$$

$$4.000 \cdot 12 = 48.000 \text{ ptas. corresponden al primero}$$

$$4.000 \cdot 6 = 24.000 \text{ ptas corresponden al segundo}$$

$$4.000 \cdot 3 = 12.000 \text{ ptas corresponden al tercero}$$

3º.- Que los capitales y los tiempos sean distintos: En este caso se dividen las ganancias o pérdidas en partes proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos.

Ej.: Pedro inicia un negocio con 200.000 ptas. Ocho meses más tarde se le une Andrés que aporta a la empresa 300.000 ptas. Al final del primer año obtienen un beneficio de 1.080.000 ptas ¿Cuál es el beneficio obtenido por cada uno?

Razonamiento: Hay que hacer un reparto directamente proporcional al producto de cada capital por el tiempo que ha estado invertido

$$200.000 \cdot 12 = 2.400.000$$

$$300.000 \cdot 4 = 1.200.000$$

Hay que repartir 1.080.000 en partes proporcionales a 24 y 12 (resultado de simplificar los productos anteriores)

$$24 + 12 = 36$$

$$1.080.000 : 36 = 30.000$$

$$30.000 \cdot 24 = 720.000 \text{ ptas corresponden al primero}$$

$$30.000 \cdot 12 = 360.000 \text{ ptas. corresponden al segundo}$$

DESCUENTO

Descuento es la cantidad que se rebaja de un capital cuando se cobra antes de la fecha convenida. Cuando un comprador no paga al contado una mercancía, frecuentemente firma un documento por el que se compromete a pagar en una fecha determinada. Este documento es, normalmente, **una letra de cambio**.

Letra de cambio es un documento por el cual el vendedor (llamado **acreedor o librador**, persona a quien se debe dinero) ordena al comprador (llamado **deudor o librado**, persona que le debe dinero) pagar una cantidad a una tercera persona o entidad (llamada **tenedor**) en la fecha que se indica.

Si el documento lo extiende el comprador (deudor) recibe el nombre de **pagaré**

Si el vendedor (**acreedor**) necesita el dinero antes de la fecha indicada vende la letra a un banco, el cual no le entrega la cantidad escrita en la letra (**nominal o N**) sino que se queda con una cantidad (**descuento**) por pagar antes de la fecha convenida en la letra.

- **Valor nominal (N):** es la cantidad a pagar, escrita en la letra de cambio, se pagará en la fecha estipulada.
- **Vencimiento:** Fecha en la que debe pagarse la letra de cambio
- **Descuento (D):** Es la cantidad que el banco rebaja del valor nominal por pagar la letra antes del vencimiento
- **Valor efectivo o actual (E):** Es lo que realmente paga el banco por la letra de cambio, una vez efectuado el descuento

Por tanto de lo anterior resulta:

$$E = N - D$$

$$D = N - E$$

$$N = D + E$$

DESCUENTO COMERCIAL: Es el interés simple que produciría el valor nominal durante el tiempo que transcurra hasta el vencimiento de la letra, calculado a un tanto por ciento determinado.

Los problemas de descuento comercial se solucionan como los problemas de interés en días (el tiempo suele darse en días) sustituyendo el capital (C) por el valor nominal (N) y el interés (I) por el descuento (D)

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t (\text{días})}{36000}$$

$$D = \frac{N \cdot r \cdot t (\text{días})}{36.000}$$

Ej.. ¿Cuál es al 7 de Junio del valor actual de una letra de cambio de 8.000 ptas pagaderas el 21 de Agosto, si se descuenta el 6 % ¿

Razonamiento: Desde el 7 de Junio hasta el 21 de Agosto transcurren 75 días.

Aplicando la fórmula resulta: $E = N - D$

El valor nominal (N) = 8.000 ptas

Debemos hallar el descuento, para ello aplicamos la fórmula:

$$D = \frac{N \cdot r \cdot t}{36.000} \quad D = \frac{8.000 \cdot 6 \cdot 75}{36.000} = 100 \text{ ptas}$$

Por tanto el valor efectivo o actual será:

$$E = N - D$$

$$E = 8.000 - 100 = 7.900 \text{ ptas}$$

REGLA DE ALIGACIÓN.- MEZCLAS

En los problemas de mezclas siempre se cumple que:

$$C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2 + \dots C_n \cdot P_n = C_m \cdot P_m$$

Mediante la regla de aligación podemos resolver problemas de mezclas o aleaciones (mezclas entre metales)

Casos: 1º.- Hallar el precio medio de una mezcla conociendo las cantidades que se mezclan de cada sustancia y los precios respectivos (aligación directa)

$$P_m = \frac{C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2 + \dots C_n \cdot P_n}{C_1 + C_2 + \dots C_n} \quad \Rightarrow \quad P_m = \frac{\text{Coste total}}{\text{Cantidad total}}$$

Ej.: Mezclamos 60 litros de aceite a 380 ptas el litro con 80 litros de aceite a 440 ptas el litro y con 90 litros de aceite cuyo precio es de 360 ptas el litro. ¿A cómo resulta el litro de la mezcla?

$$P_m = \frac{60 \cdot 380 + 80 \cdot 440 + 90 \cdot 360}{60 + 80 + 90} = \frac{22.800 + 35.200 + 32.400}{230} = \frac{90.400}{230} = 393 \text{ ptas/l es el precio de la mezcla}$$

Caso 2º: Hallar qué cantidad de sustancias han de mezclarse conociendo su precio y el precio de la mezcla. (Aligación inversa)

Partimos de la fórmula anterior :

$$P_m = \frac{C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2}{C_1 + C_2} \quad \Rightarrow \quad P_m (C_1 + C_2) = C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2$$

$$P_m \cdot C_1 + P_m \cdot C_2 = C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2$$

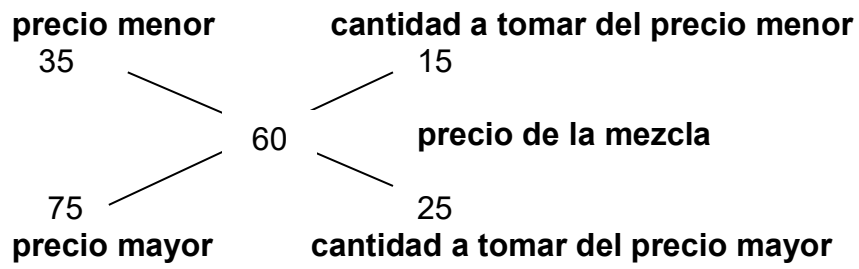
$$P_m \cdot C_1 - C_1 \cdot P_1 = C_2 \cdot P_2 - P_m \cdot C_2$$

$$C_1 (P_m - P_1) = C_2 (P_2 - P_m)$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_m - P_1}{P_2 - P_m}$$

Ej.: Un comerciante mezcla aceite de 75 ptas el litro con aceite de 35 ptas el litro. ¿Qué cantidad habrá de tomar de cada clase para que el precio de la mezcla sea de 60 ptas el litro?

Primer procedimiento:



Restamos el precio mayor del precio medio, el resultado será la cantidad