

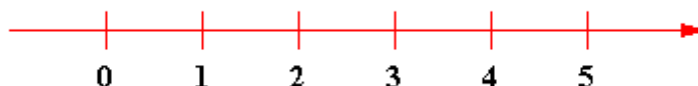
NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS

LOS NÚMEROS NATURALES (N)

Los números naturales (N) se utilizan habitualmente para:

- **contar o identificar.** Son los números **cardinales**.
- **para ordenar o clasificar** dentro de una lista. Son los números **ordinales**.

Los números naturales **se pueden representar gráficamente sobre una semirrecta** situando el cero en el origen y los restantes números a la derecha del mismo y a la misma distancia unos de otros



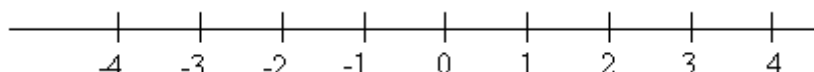
Un número natural es mayor que otro si al representarlo en la recta numérica queda más a la derecha

LOS NÚMEROS ENTEROS (Z)

Los números enteros (Z) se utilizan para expresar:

- **situaciones o posiciones** (deber-tener, temperatura, altitud, ...)
- **variaciones o desplazamientos** (subir-bajar, ganar-perder, avanzar-retroceder, ...)

Los números enteros **también se pueden representar gráficamente en una recta** situando el cero el cualquier punto de ella, los números enteros negativos se sitúan a la izquierda del cero y los positivos a la derecha y a la misma distancia unos de otros



Un número entero es mayor que otro si al representarlo en la recta numérica queda más a la derecha

Valor absoluto de un número entero es el número natural que resulta de suprimir el signo + o - que le precede. El valor absoluto se representa colocando al número entre dos barras verticales $| |$

$$|-3| = 3, \quad |+3| = 3, \quad |-7| = 7, \quad |0| = 0$$

Cuando dos números tienen el mismo valor absoluto pero distinto signo se dice que son **opuestos**

$$+5 \text{ y } -5; \quad +27 \text{ y } -27$$

OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS

Cuando una expresión aritmética tiene varias operaciones hay que tener en cuenta el orden en que deben realizarse. **Como norma general, primero se efectúan las potencias y raíces, luego las multiplicaciones y divisiones y, finalmente, las sumas y restas.**

$$5 \cdot 3 + 6 = 15 + 6 = 21$$

$$7 + 18 : 3 = 7 + 6 = 13$$

$$17 - 8 : 4 = 17 - 2 = 15$$

Este orden puede modificarse mediante la utilización de paréntesis. **Los paréntesis indican que las operaciones contenidas dentro de ellos deben realizarse con prioridad**

$$(4 + 2) \cdot 5 - (7 - 3) : 2 = 6 \cdot 5 - 4 : 2 = 30 - 2 = 28$$

$$7 \cdot (4 - 2) + 8 : (6 - 2) = 7 \cdot 2 + 8 : 4 = 14 + 2 = 16$$

Al **operar con números enteros** debes recordar:

a) SUMA: - si son del mismo signo se suman y se deja el signo que tengan

- si son de signo contrario se restan y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto

$$(+4) + (+3) = +7 \quad (+7) + 0 = +7 \quad (-3) + (+6) = +3$$

$$(-4) + (-3) = -7 \quad (-6) + 0 = -6 \quad (+4) + (-5) = -1$$

b) RESTA: - para restar sumamos al primero (minuendo) el opuesto del segundo (sustraendo)

$$(-10) - (+7) = (-10) + (-7) = -17 \quad (+10) - (-7) = (+10) + (+7) = +17$$

$$(-3) - (+8) = (-3) + (-8) = -11 \quad (+5) - (+8) = (+5) + (-8) = -3$$

c) **MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN:** - si los números son del mismo signo el resultado será positivo
 - si los números son de distinto signo el resultado será negativo

$$(+4) \cdot (+3) = +12 \quad (-4) \cdot (+3) = -12$$

$$(+18) : (+3) = +6 \quad (-18) : (+3) = -6$$

$$(+4) \cdot (-3) = -12 \quad (-4) \cdot (-3) = +12$$

$$(+18) : (-3) = -6 \quad (-18) : (-3) = +6$$

d) **POTENCIACIÓN:** - si la base es positiva la potencia es siempre positiva
 - si la base es negativa la potencia será positiva si el exponente es par y negativa si el exponente es impar
 - recuerda que:

$$(-a)^n \text{ no siempre es igual a } -a^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

$$a^1 = a \quad ; \quad a^0 = 1 \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

e) **RADICACIÓN:** - es la operación inversa de la potenciación
 - la raíz enésima de un número **a** es otro número **b** tal que elevado a la potencia **n** da como resultado **a**

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$$

$$\sqrt{9} = 3 \Rightarrow 3^2 = 9$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow 5^3 = 125$$

$$\sqrt[4]{16} = 2 \Rightarrow 2^4 = 16$$

$$\sqrt[4]{625} = 5 \Rightarrow 5^4 = 625$$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

	NÚMEROS NATURALES (N)	NÚMEROS ENTEROS (Z)
S U M A	OP. INTERNA: $a \in N \Rightarrow a + b \in N$ <i>"La suma de dos números naturales es otro número natural"</i>	OP. INTERNA: $a \in Z \Rightarrow a + b \in Z$ <i>"La suma de dos números enteros es otro número entero"</i>
	CONMUTATIVA $a \in N \Rightarrow a + b = b + a$ <i>"El orden de los sumandos no altera la suma"</i>	CONMUTATIVA $a \in Z \Rightarrow a + b = b + a$
	ASOCIATIVA $a \in N \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ $b \in N$ $c \in N$ <i>"Se pueden sustituir dos o más sumandos por su suma"</i>	ASOCIATIVA $a \in Z \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ $b \in Z$ $c \in Z$
	E. NEUTRO $a \in N \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a$ <i>"La suma de cualquier número y el cero da como resultado el mismo número"</i>	E. NEUTRO $a \in Z \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a$
		E. OPUESTO O SIMÉTRICO $a \in Z \Rightarrow a + op(a) = 0$ <i>"Todo número entero tiene su opuesto con el que sumado da 0 (elemento neutro)"</i>

P R O D U C T O	OP. INTERNA: $a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{N}$ <i>"El producto de dos números naturales es otro número natural"</i>	OP. INTERNA: $a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}$ <i>"El producto de dos números enteros es otro número entero"</i>
	CONMUTATIVA $a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ <i>"El orden de los factores no altera el producto"</i>	CONMUTATIVA $a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$
	ASOCIATIVA $a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{N} \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $c \in \mathbb{N}$ <i>"Se pueden sustituir dos o más factores por su producto"</i>	ASOCIATIVA $a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $c \in \mathbb{Z}$
	E. NEUTRO $a \in \mathbb{N}$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ <i>"El producto de cualquier número por el 1 da como resultado el mismo número"</i>	E. NEUTRO $a \in \mathbb{Z}$ $a \cdot (+1) = (+1) \cdot a = a$
	DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ <i>"El producto de un número por una suma es igual a la suma de dicho número por cada uno de los sumandos"</i>	

ACTIVIDADES DE REFUERZO

NÚMEROS NATURALES

- * Para qué sirven los números naturales. Pon tres ejemplos.
- * ¿En qué operaciones al operar con dos números naturales obtenemos otro número natural?.
- * ¿En qué operaciones al operar con dos números naturales no siempre obtenemos otro número natural?.
- * ¿Cuáles de estas magnitudes siempre se pueden expresar con un número natural?.
- un número de teléfono – tu edad menos la mía – posición de un ascensor – tus ahorros menos los míos – el saldo de una cuenta – la temperatura – altitud respecto al mar – el día del mes.
- * ¿Cuáles de estas magnitudes no siempre se pueden expresar con un número natural?.
- el día del mes – tu edad más 17 – tu altura – altitud respecto al mar – ninguna de ellas – se pueden todas – lo que vale un lápiz – un número de teléfono – el número del DNI.

* Completa la tabla:

6.549	Descomposición en órdenes de unidades:
	Descomposición en sumandos:
	Descomposición polinómica:
123.897	Descomposición en órdenes de unidades:
	Descomposición en sumandos:
	Descomposición polinómica:

* Rellena las casillas vacías:

a	b	a + b	a - b	a · b	a : b
		35			4
	1		28		
31	1				
	5	50			
	10		40		

a	b	a + b	a - b	a · b	a : b
	6				7
	7				4
	8				4
20		25			

Efectúa las operaciones siguientes (Observa el efecto de los paréntesis)

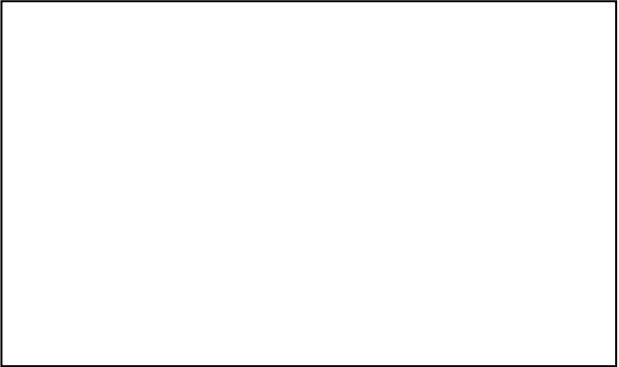
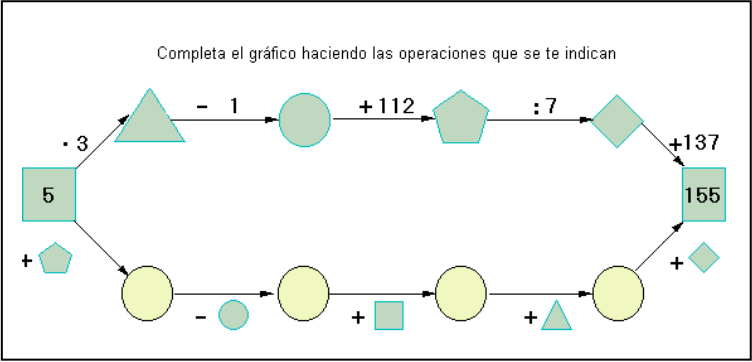
$6 + 4 : 2 =$	$16 + 4 \times 2 =$	$6 + 4 : 2 + 16 + 4 \times 2 =$
$(6 + 4) : 2 =$	$(16 + 4) \times 2 =$	$(6 + 4) : 2 + (16 + 4) \times 2 =$

Escribe en cada recuadro el signo que falta

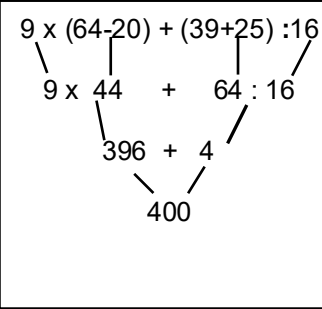
$(271 \square 7) \square 14 = 3696$	$(998 \square 19) \square 21 = 20559$	$(557 \square 4) \square 22 = 12342$
$271 \square 7 \square 14 = 173$	$998 \square 19 \square 21 = 599$	$557 \square 4 \square 22 = 645$

Completa las cifras que faltan:

$\begin{array}{r} 7 \quad 2 \\ \times 8 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 9 \quad 5 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \quad 3 \\ \times 5 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 9 \quad 5 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \\ \times 8 \quad 6 \\ \hline 4 \quad 0 \quad 8 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ \times 6 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \end{array}$
---	---	---	---



- * En las siguientes expresiones, coloca los paréntesis en el lugar conveniente de modo que las igualdades sean ciertas:
- $4 \times 12 - 8 + 25 = 41$
 - $3 \times 14 - 9 + 5 = 28$
 - $25 - 13 \times 2 + 18 = 42$
 - $35 : 5 + 2 + 80 = 85$
 - $120 : 2 - 25 + 14 = 21$
 - $60 - 18 : 7 + 39 = 45$



- * Fíjate en el ejemplo y realiza el árbol de cálculo de las operaciones siguientes:
- $6.000 : 20 - 34 \times 8 + 12 \times 9$
 - $59 \times (145 + 37) - 24 \times (104 - 76)$
 - $528 - 47 \times 3 + 540 : 3$
 - $64 \times 7 - (96 - 28) \times 4$

* Indica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Pon un par de ejemplos:

ENUNCIADOS	V/F	EJEMPLOS
"El triple de una suma es igual a la suma de los triples"		
"El doble de una suma es igual a la suma de los dobles"		

- * Si a la suma de dos números le sumamos su diferencia ¿qué observas en el resultado?. Haz la prueba con varios números.
- Escribe una ley que te permita generalizar la conclusión que has obtenido
 - Teniendo en cuenta el ejercicio anterior resuelve: La suma de dos números es 14.077; su diferencia es 2.169 ¿Cuáles son dicho números?
- * Si a la suma de los números le restamos su diferencia ¿qué observas en el resultado? Haz la prueba con varios números.
- Escribe una ley que te permita generalizar la conclusión que has obtenido
 - Teniendo en cuenta el ejercicio anterior resuelve: La suma de dos números es 100, su diferencia 60. ¿Cuáles son los dos números?

¡Fíjate en estas sumas!	Expresa en forma de resta	¡Fíjate en estas restas!	Expresa en forma de suma
* $3 + 4 = 7$		* $6 - 4 = 2$	
* $6 + 5 = 11$		* $8 - 5 = 3$	
* $7 + 12 = 19$		* $7 - 2 = 5$	
* $12 + 8 = 20$		* $12 - 4 = 8$	
Conclusión		Conclusión	

¡Fíjate en estas sumas!	Expresa en forma de producto	¡Fíjate en los productos!	Expresa en forma de potencia
$3 + 3 + 3 + 3 =$		$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$	
$6 + 6 + 6 =$		$6 \times 6 \times 6 \times 6 =$	
$7 + 7 + 7 + 7 + 7 =$		$3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 =$	
$(12 + 12) - (3 + 3 + 3) =$		$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 =$	
Conclusión		Conclusión	

¡Fíjate en estos productos	Expresa en forma de división	¡Fíjate en las divisiones	Expresa en forma de producto
$5 \times 4 = 20$		$6 : 3 = 2$	
$6 \times 3 = 18$		$12 : 4 = 3$	
$2 \times 12 = 24$		$20 : 5 = 4$	
$14 \times 3 = 42$		$75 : 15 = 5$	
Conclusión		Conclusión	

¡Fíjate en las potencias!	Expresa en forma de raíz	¡Fíjate en las raíces!	Expresa en forma de potencia
$4^2 = 16$		$\sqrt{49} = 7$	
$5^4 = 625$		$\sqrt[4]{81} = 3$	
$3^5 = 243$		$\sqrt[5]{32} = 2$	
$2^4 = 16$		$\sqrt{81} = 9$	
Conclusión		Conclusión	

Calcula la raíz y el resto. Haz la prueba para ver si te has equivocado

RADICANDO	RAÍZ	RESTO	PRUEBA DE LA RAÍZ CUADRADA
141			
56			
107			
178			

Escribe los números que faltan:

a) $4 \times (5 + \square) = 36$	b) $(30 - \square) : 5 + 4 = 8$	c) $18 \times \square + 4 \times \square = 66$	d) $30 - \square : 8 = 25$
----------------------------------	---------------------------------	--	----------------------------

Coloca paréntesis adecuadamente de modo que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $9 + 5 \cdot 2 - 7 \cdot 3 + 5 = 12$	
b) $3 + 5 \cdot 4 - 12 = 20$	

Escribe los signos de las operaciones y los paréntesis necesarios para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 3$		d) $4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 1$	
b) $3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 = 3$		e) $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 = 1$	
c) $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 = 14$			

PROBLEMAS CON NÚMEROS NATURALES

* Los 70 alumnos de 2º de ESO hacen una excursión en autobús. Les han dicho que le precio del autobús es de 630 ptas. por persona, pero en el autobús sólo caben 55 alumnos. El resto decide ir en tren y cada billete cuesta 700 ptas. Ven que no es justo que unos paguen más que otros y deciden repartir los gastos entre todos. ¿Cuánto tendrá que pagar cada alumno si lo reparten en partes iguales?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* En un determinado país debido al consumo de tabaco 1 de cada 300 personas tiene problemas respiratorios y 2 de 800 tiene problemas cardiovasculares. ¿Cuántos médicos especialistas se necesitarán si se pretende que cada uno atienda a 350 paciente si dicho país tiene 34.380.000 habitantes?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Averigua cuántos niños hay en una clase donde se repartes 346 folios si a cada niño le tocan 23 y sobra 1 folio

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un libro tiene 11 capítulos de 8 páginas cada uno. Si estás leyendo en la página 46. ¿en qué capítulo estás?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un libro tiene 11 capítulos de 8 páginas cada uno. Si lees cada día 6 páginas y estás en la página 46 ¿cuánto tardarás en leer todo el libro?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

- Juan ha regalado 15 postales a Marta y le han quedado 124. Después del regalo, Marta tiene doble número de postales que Juan. ¿Cuántas postales tenía cada uno?
- Escribe una división en la que el divisor sea igual al doble del cociente y el triple del resto
- Laura hace ramos de flores. Si coloca 12 flores en cada ramo, le salen 8 ramos y le sobran algunas flores. Si tuviera 8 flores más, podría hacer 9 ramos y no le sobraría ninguna flor. ¿Cuántas flores tiene Laura?
- En una resta el sustraendo es igual al doble de la diferencia. El minuendo es 1.341. Halla el sustraendo y la diferencia
- La diferencia entre dos números es 1.284 y el mayor es igual al triple del menor. ¿Cuáles son los números?
- Escribe una resta en la que el sustraendo sea igual al triple de la diferencia
- En una librería han vendido hoy 315 libros más que ayer. Entre los dos días han vendido 1.325 libros. ¿Cuántos libros vendieron ayer?
- Si se multiplica un número por 45, su valor aumenta en 2.464 unidades. ¿Cuál es el número?
- Al multiplicar un número por 24 su valor aumenta en 1.334 unidades ¿Cuál es el número?
- ¿Por qué número hay que multiplicar a 44 para que su valor aumente en 2.332 unidades?
- Dice Carlos: "Me da lo mismo multiplicar este número por 10 que sumarle 72" ¿Qué número es?
- En una división, el divisor y el cociente son iguales y el resto, igual a 12, toma el mayor valor posible. Calcula el dividendo
- ¿Cuál es el número que al dividirlo entre 43 da un cociente igual a 34 y el resto toma el mayor valor posible
- Escribe dos números entre 200 y 300 tales que al dividirlos entre 56 el resto tome el mayor valor posible
- La suma de dos números es 288 y el cociente entre ellos es 8. ¿Cuáles son los números?
- Don Tomás quiere repartir unos libros entre sus hijos. Puede hacerlo dándole 1 al menor, 2 al segundo, 3 al tercero... Otro modo de repartirlos sería dar 7 a cada uno. ¿Cuántos hijos y cuántos libros tiene D. Tomás?
- El producto de dos números es 64 y su suma 20. ¿Cuáles son los números?
- Se reparten 9.000 ptas entre cuatro amigos de manera que:
 - el segundo recibe el doble que el primero
 - el tercero triple que el segundo
 - el cuarto recibe lo mismo que los otros tres juntos
 ¿Cuánto recibe cada uno?
- Un problema antiguo:
Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando pesados sacos. El caballo se quejaba de su carga.
El mulo le dijo: "*¿De qué te quejas?. Si yo cargara uno de tus sacos, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te diera un saco, los dos llevaríamos la misma carga.* ¿Cuántos sacos llevaba cada uno?
- Un problema oriental:
Abdulá era un vendedor de seda. En una ocasión le prometió a su criado Alí:
"Si consigo vender esta partida por 100 dinares, tendré en cuenta tus buenos servicios y te recompensaré con 20 dinares. Pero si los vendiera por 200 dinares, sería aún más generoso contigo y te daría 30 dinares"
Ocurrió que Abdulá vendió su mercancía por 140 dinares. Y ahí empezaron las discusiones.
Abdulá decía:
"*Toma tus 21 dinares. Recuerda que te dije que si vendía la seda por 200 te daría 30, o sea, por cada 20 dinares de venta, 3 para ti. Como en 140 hay 7 montones de 20, te corresponden 21.*
Alí no estaba de acuerdo, quería 28
¿Cómo razonaba Alí?
¿Cómo harías tú el reparto?

NÚMEROS ENTEROS

¿Para que sirven los números enteros? Pon tres ejemplos

¿Cuáles de estas magnitudes siempre se pueden expresar con un número entero?

un número de teléfono – tu edad menos la mía – posición de un ascensor – tus ahorros menos los míos – el saldo de una cuenta – la temperatura – altitud respecto al mar – el día del mes

¿Cuáles de estas magnitudes no siempre se pueden expresar con un número entero?

el día del mes – tu edad más 17 – tu altura – altitud respecto al mar – ninguna de ellas – se pueden todas – lo que vale un lápiz – un número de teléfono – el número del DNI.

Completa las frases siguientes:

- De varios números enteros positivos es mayor el de _____ valor absoluto
- El cero es mayor que _____
- De varios números enteros negativos es mayor el de _____ valor absoluto

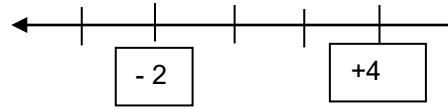
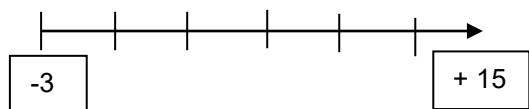
¿En qué operaciones al operar con dos números enteros obtenemos otro número entero?

¿En qué operaciones al operar con dos números enteros no obtenemos otro número entero?

Completa la tabla siguiente:

COMPLETA ...	FÓRMULA
Situación final =	Sf =
Variación =	V =
Situación inicial =	Si =

Expresa como suma y como resta:



SUMA:	SUMA:
RESTA:	RESTA:

Completa las casillas que faltan:

$\begin{array}{r} \square \\ + \\ -18 + -20 = \square \\ = \\ -14 \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \\ + \\ -3 + -20 = \square \\ = \\ \square \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ + \\ 0 + \square = 14 \\ = \\ \square \end{array}$	$\begin{array}{r} -7 \\ + \\ \square + -12 = 6 \\ = \\ \square \end{array}$
$\begin{array}{r} \square \\ + \\ 10 + 13 = \square \\ = \\ 14 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ + \\ -15 + -17 = \square \\ = \\ \square \end{array}$	$\begin{array}{r} \square \\ + \\ 18 + \square = 23 \\ = \\ -8 \end{array}$	$\begin{array}{r} \square \\ + \\ -1 + 13 = \square \\ = \\ 21 \end{array}$

* Señala qué afirmaciones son ciertas y pon un ejemplo:

	V/F	EJEMPLO
* La suma de dos enteros de distinto signo es siempre menor que el mayor de ellos.		
* La resta de dos números enteros puede ser mayor que su suma.		
* La resta de dos números enteros puede ser mayor que ambos números.		
* La resta de dos números enteros puede ser menor que ambos números.		

Rellena las casillas vacías:

a	b	a + b	a - b	a · b	a : b
-9	-9				
			20		-1
	-3		12		
	-13	0			
-10			-11		

a	b	a + b	a - b	a · b	a : b
-4		-2			
		5	7		
			-12		-2
	3		0		
				-20	-5

Señala en qué expresiones está bien sacado el factor común

$(-2) \cdot (-3) + (-2) \cdot (+5) =$	$(-2) \cdot [(-3) + (+5)] = (-2) \cdot (+2) = -4$
	$(-2) \cdot [(-3) + (-2)] \cdot (+5) = +50$
$(-3) \cdot (+5) - (+5) \cdot (+1) =$	$(-3 + 1) \cdot [(+5)] = (-2) \cdot (+5) = -10$
	$(+5) \cdot [(-3) - (+1)] = (+5) \cdot (-4) = -20$
$(-4) \cdot (-1) + (+3) \cdot (-1) =$	$[(-4) + (+3)] \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) = +1$
	$(-1) \cdot [(-4) + (+3)] = (-1) \cdot (-1) = +1$

Escribe cada una de las propiedades siguientes con potencias

$(-a)^{n(\text{par})} \neq -a^{n(\text{par})}$	
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	
$a^n : a^m = a^{n-m}$	
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	
$(a : b)^n = a^n : b^n$	
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	
$a^1 = a$	
$a^0 = 1$	

Completa la tabla siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DOBLE										
CUADRADO										
TRIPLE										
CUBO										

Completa esta tabla haciendo las operaciones que se indican:

a	b	a ²	b ²	a ² - b ²	a - b	a + b	(a + b) ²	(2a) ²	(-b) ²
-2	6								
4	-3								
-5	-7								
8	1								

Indica si son ciertas las siguientes igualdades:

$(-2)^2 = -2^2$	$3^2 = (-3)^2$	$-2^5 = (-2)^5$	$(-5)^4 = -5^4$
-----------------	----------------	-----------------	-----------------

Escribe el resultado en forma de una sola potencia

$2^5 \cdot 2^4 \cdot 2^7 =$	$4^5 \cdot 4^6 \cdot 4^2 =$	$(-6)^6 \cdot (-6)^3 \cdot (-6)^2 =$	$(-3)^4 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^5 =$
$[(2)^1]^2 =$	$6^4 : 6^3 =$	$(-6)^2 : (-6)^{-2} =$	$[(-3)^{-3}]^{-2} =$

Si x es un número entero calcula:

$[(x)^2]^2 =$	$x^3 \cdot x^{-3} \cdot x^2 =$	$(x^5 \cdot x^6)^2 =$	$(x^5 \cdot x^6)^{-2} =$
$[((-x)^{-2})^2]^{-1} =$	$\frac{x^2 \cdot x^3}{x^{-2}} =$	$\left[\frac{(x^{-2} : x^{-1})^{-3}}{x^3}\right]^{-1} =$	$\left[\frac{(x^{-2})^{-1}}{(x^2)^1}\right]^{-1} =$

PROBLEMAS

* Una barra de hielo está a 13 grados bajo cero. Si la calentamos a 33 grados ¿Qué variación hay de temperatura?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un cajero automático registra con números enteros positivos los ingresos y con números negativos los reintegros o salidas. De 9 a 12 de la noche se registra el siguiente movimiento de dinero:

De 9 a 10: - 10.000 + 15.500 – 25.000 – 10.000 + 35.000 + 50.000

De 10 a 11: - 15.500 + 10.500 – 25.000 + 30.000 – 15.000

De 11 a 12: - 10.000 + 55.000

Indica: a) el movimiento registrado en cada hora

b) el saldo final, a las 12 de la noche, si a las 9 había en el cajero 900.500 ptas.

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un rascacielos tiene 20 pisos y 4 sótanos de garaje y almacenes. En el ascensor, que recorre todo el edificio, el ascensor señala con números positivos los pisos sobre el suelo, con 0 la planta baja y con números negativos los sótanos. Indica el tiempo que tarda en subir del sótano tercero al piso 15 si de un piso a otro emplea 8 segundos.

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un depósito tiene un grifo de salida de 15 litros por minuto, y otro de entrada de 20 litros por minuto. Si se abren los dos grifos a la vez ¿Cuánta agua tendrá el depósito al cabo de 3 horas?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un depósito tiene 1.000 litros de agua; se vacía por un grifo de 25 litros por minuto, y se llena con otro grifo a 20 litros por minuto. ¿Cuánta agua tiene pasada media hora? ¿Cuánto tarda en vaciarse?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un buque factoría ha pescado una gran cantidad de calamar y se dispone a congelarlo. En su cámara frigorífica la temperatura desciende 3° C cada 5 minutos. Si al principio la cámara está a 9° C

a) ¿Cuánto tardará en alcanzar – 27 °C

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

b) ¿Qué temperatura tendrá al cabo de dos horas y media?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* La temperatura de la superficie de una nave espacial al entrar en la atmósfera pasa de –200° C a 2.300° C en diez minutos

a) ¿Cuánto aumenta la temperatura por minuto?

b) ¿Qué temperatura tiene la nave a los tres minutos

c) ¿Qué tiempo pasa hasta alcanzar los 1.800° C

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* En un termómetro en el que aparecen señaladas las temperaturas – 10° C y 40° C la diferencia entre dos señales es siempre el mismo número de grados, entero y mayor que 1. ¿De cuántas maneras puede estar graduado el termómetro?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Se han comprado 3 piezas de tela a 450 ptas el metro, pagándose por ellas 15.750 ptas. La primera pieza mide 10 m y segunda 20 m. ¿Cuánto mide la tercera pieza?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

- 1./ Un termómetro marcaba - 2° C y durante la mañana la temperatura ha bajado 4° C. Calcula la temperatura que hay actualmente
- 2./ El pie de una montaña está a una altitud sobre el nivel del mar de 573 m. Si la diferencia de nivel entre el pie y la cima es de 1.032 m ¿Cuál es la altura de la montaña sobre el nivel del mar?
- 3./ Calcula la diferencia de temperatura entre Madrid y León si en primera hay una temperatura de + 5° C y en la segunda de - 4° C
- 4./ El lago Tiberiades está a - 212 m respecto al nivel del mar y el mar Muerto a - 392 m. Calcula el desnivel del río Jordán que une los dos y dí hacia dónde van sus aguas
- 5./ De un depósito que contenía 120 litros de agua se han extraído 25 litros. ¿Cuántos litros se han vuelto a echar en el depósito si ahora tiene 145 litros
- 6./ Un buceador está a - 35 m del nivel del agua y sube por precaución a la velocidad de 3 metros por minuto. ¿A qué profundidad estará al cabo de 5 minutos?
- 7./ Juan y Pablo salen de Madrid en la misma dirección y en sentidos opuestos. Juan va en su moto a la velocidad de 65 km/h k, mientras que Pablo va en coche a 70 km/h . Si salen al mismo tiempo ¿Cuál será la distancia que les separa a ambos al cabo de tres horas?

- 8./ Un coche tiene en su depósito 35 litros de gasolina. Se mueve a la velocidad de 80 km/h y gasta 5 litros por cada 100 km. Calcula cuántos litros quedan en el depósito después de 5 horas de viaje
9. / En una cámara de congelar pescado hay una temperatura de 12°C bajo cero. Se avería la instalación y la temperatura sube 19°C ¿Cuál es la temperatura a que queda la cámara?
- 10./ El dividendo de una división es 35 y el cociente - 7. Halla el divisor
- 11./ El dividendo y el divisor son 36 y 9 ¿Puede ser - 4 el cociente?
- 12./ ¿Es posible que al multiplicar dos factores uno sea 329 y el producto sea 36.519? Razona la respuesta
- 13./ Al enchufar a la corriente un arcón congelador, la temperatura desciende 2°C cada 8 minutos. En el momento de enchufarlo el interior del arcón está a 16°C ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 24°C bajo cero? ¿A qué temperatura se encontrará al cabo de dos horas de tenerlo enchufado?
- 14.- Un alpinista está escalando una montaña cuya altura va desde los 1.325 metros sobre el nivel del mar hasta los 1.874. Si ha superado la tercera parte de la montaña. ¿Cuántos metros le faltan para llegar a la cumbre?
- 15.- En un depósito hay 3.360 litros de agua. Por una boca de riego salen 85 litros de agua por minuto mientras que dos fuentes vierten en él 16 y 25 litros respectivamente. Calcula la cantidad de agua del depósito al cabo de una hora.
- 16.- Euclides nació en el año 300 a.C. y Pitágoras en el año 580 a.C.
 - a) ¿Cuál de ellos nació antes?
 - b) ¿Cuántos años transcurrieron desde que nació el primero hasta que nació el segundo?
- 17.- La temperatura más alta registrada en el mundo fue de 58°C en Libia y la más baja de 88°C bajo cero, que tuvo lugar en la Antártida

¿Cuál es la diferencia entre la temperatura de Libia y la de la Antártida?
- 18.- Las primeras leyes que han llegado hasta nosotros son las del código de Hammurabi del año 1.750 a.C. La actual Constitución española se proclamó en 1.978. ¿Cuántos años han transcurrido desde la aparición del código de Hammurabi hasta la proclamación de la Constitución española?
- 19.- Ana y su padre llegan a este acuerdo: el padre promete darle 500 ptas. por cada nota superior al aprobado. Ana le entregará 300 ptas por cada suspenso.

Después de 12 calificaciones, Ana tuvo que entregar a su padre 1.200 ptas. ¿Qué calificaciones obtuvo?
- 20.- Un avión vuela a 9.000 m. de altura. Sube 1.000 m para situarse sobre una borrasca y luego desciende en dos ocasiones el mismo número de metros. Después de estas maniobras el avión queda a una altura de 600 m.

¿Cuántos metros bajó en cada ocasión?
- 21.- Entre un entero positivo y otro negativo hay cuatro enteros.
 - a) ¿Cuáles son esos números?
 - b) ¿Hay más de una solución?
- 22.- ¿Cuáles son los números enteros que cumplen cada una de estas condiciones?
 - a) su valor absoluto es mayor que 6 y menor que 10
 - b) su opuesto está situado entre 7 y 10
 - c) Es igual a la diferencia de dos enteros del mismo valor absoluto y distinto signo
- 23- El opuesto de la suma es - 4 y otro entero es igual a 12. ¿Cuál es el entero desconocido?
- 24.- La diferencia entre un entero y el triple de su valor absoluto es igual a - 14 ¿Cuál es el entero?
- 25.- La diferencia entre el año que nació Fernando y el año en que nació Julia es igual a - 5
 - a) ¿Cuál de los dos es mayor?
 - b) Si Fernando nació en el año 1.980 ¿en qué año nació Julia?
- 26.- El metro es un medio de transporte muy útil. El primer metro fue el de Londres, construido en 1.863. En 1.919 se inauguró el de Madrid y en 1.995 el de Bilbao. Explica con palabras lo que significan estas operaciones:
 - a) $1.995 - 1.863$
 - b) $1.863 - 1.919$
 - c) $1.919 - 1.995$

REPASO TEMA 2: MÚLTIPLOS Y DIVISORES. M.C.D. – M.C.M.

MÚLTIPLOS: - Un número es múltiplo de otro cuando le contiene un número exacto de veces

- Múltiplos de un número **a** son los que resultan de multiplicar **a** por cada uno de los números naturales, por tanto el conjunto de los múltiplos de un número es infinito.
- Un número **a** es múltiplo de otro **b** cuando existe otro número **c** que multiplicado por **b** da **a**

$$a = b \cdot c \Rightarrow a \text{ es múltiplo de } b \text{ y de } c$$

$$15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow 15 \text{ es múltiplo de } 3 \text{ y de } 5$$

- Para saber si un número **a** es múltiplo de otro **b** se realiza la división $a : b$ si dicha división es exacta **a** es múltiplo de **b**

$$\text{Ej.: } 6 \text{ y } 3 \quad 6 : 3 = 2 \text{ resto } 0 \Rightarrow 6 \text{ es múltiplo de } 3$$

$$6 \text{ y } 5 \quad 6 : 5 = 1 \text{ resto } 1 \Rightarrow 6 \text{ no es múltiplo de } 5$$

- El conjunto de los múltiplos de un número **a** se representa $\dot{a}$

$$\dot{2} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

DIVISORES: - Un número es divisor de otro cuando está contenido un número de exacto de veces en dicho número

- Un número **b** es divisor de otro **a** si la división $a : b$ es exacta

$$\text{Ej.: } 6 \text{ y } 3 \quad 6 : 3 = 2 \text{ resto } 0 \Rightarrow 3 \text{ es divisor de } 6$$

$$6 \text{ y } 5 \quad 6 : 5 = 1 \text{ resto } 1 \Rightarrow 5 \text{ no es divisor de } 6$$

- El conjunto de los divisores de un número **a** se representa $Div(a)$

$$Div(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

OBSERVA: - Si un número **a** es múltiplo de otro **b** $\Rightarrow b$ es divisor de **a**

$$\text{Ej.: } 6 \text{ y } 3 \quad 6 \text{ es múltiplo de } 3 \text{ y } 3 \text{ es divisor de } 6$$

- Todo número el múltiplo y divisor de sí mismo
- Un múltiplo de un número es igual o mayor que dicho número
- Un divisor de un número es igual o menor que dicho número

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Un número es divisible por:

- 2, si acaba en cero o cifra par
- 3, si lo es la suma de sus cifras
- 4, si las dos últimas cifras son ceros o son divisibles por 4
- 5, si acaba en cero o en cinco
- 6, si lo es a la vez por 2 y por 3
- 8, si las tres últimas cifras son ceros o son divisibles por 8
- 9, si lo es la suma de sus cifras
- 10, si termina en cero
- 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y las que ocupan lugar impar da 0, 11 o múltiplo de 11

NÚMERO PRIMOS Y COMPUESTOS

- Un número es **primo** cuando sólo tiene dos divisores: él mismo y la unidad
Ej.: 11 es un número primo porque $Div(11) = \{1, 11\}$
- Un número es **compuesto** si tiene algún divisor más que él mismo y la unidad; es decir tiene más de dos divisores

$$\text{Ej.: } 12 \text{ es un número compuesto porque } Div(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO

Podemos escribir cualquier número en forma de factores. Si los factores son números primos obtenemos la descomposición de un número en factores primos.

$$\text{Ej.: } 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$\text{Ej.: } 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

Para descomponer un número en factores primos se divide el número por el menor número primo posible. El cociente obtenido se vuelve a dividir por el menor número primo posible y así sucesivamente hasta obtener por cociente la unidad (1). Se forma un producto con todos los factores primos.

Ej.: Descomponer en factores primos el número 160

$$160 : 2 = 80 ; 80 : 2 = 40 ; 40 : 2 = 20 ; 20 : 2 = 10 ; 10 : 2 = 5 ; 5 : 5 = 1$$

$$\begin{array}{r|l} 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ 160 = 2^5 \cdot 5 \end{array}$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR: - Es el mayor de los divisores comunes de varios números
 - Se obtiene multiplicando los factores primos comunes a todos los números elevados al menor exponente

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO: - El menor de los múltiplos comunes a varios números
 - Se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente

ACTIVIDADES TEMA 2: MÚLTIPLOS – DIVISORES .- M.C.D. – M.C.M

¿Verdadero o falso?

a es divisor de b si existe un número c tal que b = a · c	
b es múltiplo de a si existe un número c tal que b = a · c	
si a es divisor de b entonces b es múltiplo de a	
un número es primo si sólo tiene como divisores él mismo y la unidad	
un número es compuesto si tiene otros divisores además de él mismo y la unidad	
dos números son primos entre sí si sólo tienen como divisores comunes a la unidad	
el máximo común divisor (m.c.d.) de varios números es el mayor de sus divisores comunes	
el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de varios números es el menor de sus múltiplos comunes	

- * Escribe en orden ascendente los tres primeros múltiplos del número 6
- * Escribe en orden ascendente los tres primeros divisores del número 6
- * Escribe en orden ascendente los seis primeros divisores del número 900
- * Completa las casillas para que los números resultantes sean múltiplos de 5 pero no de 10

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- * Escribe de menor a mayor los 5 múltiplos de 6 comprendidos entre 344 y 377

--	--	--	--	--

- * Escribe en orden ascendente todos los divisores de 290

- * Rodea con un círculo los números que sean divisores de 2 y de 3 pero no de 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- * Relaciona cada frase pintándolas del mismo color

Un número es divisible entre 6	si acaba en cero o en cifra par
Un número es divisible entre 2	si la suma de sus cifras es 3 o un múltiplo de 3
Un número es divisible entre 3	si acaba en dos ceros
Un número es divisible entre 5	si sus cifras suman 3 o un múltiplo de 3 y acaba en par o en cero
Un número es divisible entre 10	si acaba en cero
Un número es divisible entre 100	si acaba en cero o en 5

- * Escribe de menor a mayor los 5 múltiplos de 7 comprendidos entre 125 y 158

--	--	--	--	--

Teniendo en cuenta los criterios de divisibilidad indica si cada número de la fila superior es divisible por los números de la columna de la izquierda. Escribe SI o NO en cada casilla según corresponda

	75	616	90	30	98	168	200
2							
3							
5							
11							

- * Halla cuántos y cuáles son los divisores de 45 y 150

Escribe los divisores comunes de ambos números

¿Cuál es el mayor de los divisores comunes?

¿Cómo se llama este número?

- * Halla cuántos y cuáles son los divisores de 84 y 108

Escribe los divisores comunes de ambos números

¿Cuál es el mayor de los divisores comunes?

¿Cómo se llama este número?

- * Completa:

* Para hallar el m.c.d. de varios números se descomponen en factores primos y se multiplican los factores primos _____ con el _____ exponente

* Halla el m.c.d. de: 15 y 27
12, 30 y 45
5, 14 y 33

* Halla los ocho primeros múltiplos de 4 y de 6
Escribe los múltiplos comunes a ambos números
¿Cuál es el más pequeño de los múltiplos comunes?
¿Cómo se llama este número?

* Halla los diez primeros múltiplos de 3 y 5
Escribe los múltiplos comunes a ambos números
¿Cuál es el más pequeños de los múltiplos comunes?
¿Cómo se llama este número?

* Completa:

Para hallar el m.c.m. de varios números se descomponen en sus factores primos y se multiplican los factores primos _____ con el _____ exponente

* Halla el m.c.m. de 12, 15 y 45
6, 30 y 60

* Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

	V / F
Si el m.c.d. de (a y 72) = 12 ; a es múltiplo de 3	
Si el m.c.d. de (a y 72) = 12 ; a es múltiplo de 12	
Si el m.c.d. de (a y 72) = 12 ; a es múltiplo de 72	
Si el m.c.m. de (7 y a) = 70 ; a es divisor de 70	
Si el m.c.m. de (7 y a) = 70 ; a es divisor de 7	
Si el m.c.m. de (7 y a) = 70 ; a es divisor de 5	
Si el m.c.m. de (7 y a) = 70 ; a es múltiplo de 70	
Si el m.c.m. de (7 y a) = 70 ; a es múltiplo de 7	

* Halla el m.c.d. y el m.c.m. de:

- a) 48 y 72
- b) 20 y 50
- c) 30 y 70

Multiplica el m.c.d por el m.c.m. de cada número ¿qué obtienes?

¿Podrías deducir una regla?

* Aplicando la regla obtenida en la actividad anterior resuelve: El m.c.d. de dos números es 24 y su m.c.m. es 144.
Si uno de los números es 48 ¿Cuál es el otro?

PROBLEMAS:

* Un herrero tiene dos barras de hierro de 8 dm y 6 dm respectivamente. Quiere cortar las barras en trozos iguales lo más grandes posibles. Calcula cuánto medirá cada trozo y cuántos trozos obtendrá.

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un comerciante tiene 9 kg. de patatas y 75 kg. de naranjas. Quiere ponerlas en cajas de igual peso, lo más grandes posibles. ¿Cuánto pesará cada caja? ¿Cuántas cajas llenará de cada producto?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* El suelo de una nave de 125 m de ancho y 4 m de largo se quiere cubrir con unas losetas cuadradas que hacen a medida, poniéndolas enteras lo más grandes posible. ¿Qué medida tendrán las losetas? ¿Cuántas pondrán?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* El reloj de la iglesia da las campanadas cada 15 minutos. El reloj del ayuntamiento se ha estropeado y da las campanadas cada 10 minutos. Coincidieron a las 5 horas 15 minutos de la tarde. ¿Cuándo volverán a sonar juntos la próxima vez?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Un autobús hace el viaje a París cada 6 días; otro autobús lo hace cada 15 días. Si se ven los conductores en París el día 25 de Julio. ¿Cuándo vuelven a encontrarse la próxima vez?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Tres primos, Luis, Jaime y Clara, visitan a su abuela cada 12, 15 y 20 días respectivamente. Coincidieron el día 17 de octubre que era el cumpleaños de la abuela. ¿qué día vuelven a reunirse por primera vez?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Tres barcos A, B y C hacen un crucero por el Mediterráneo de 12, 15 y 20 días de duración respectivamente. Si salen los tres de Barcelona el día 29 de mayo ¿qué día volverán a coincidir? ¿cuántos viajes habrá realizado cada uno hasta esa fecha?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* En el colegio de Luis hay 108 alumnos de 1º y 81 de 2º de ESO, que se juntan en el patio en filas de igual número de alumnos, pero sin mezclarse de los dos cursos. ¿Cuántos alumnos habrá en cada fila para que el número de filas sea mínimo? ¿Cuántas filas habrá de cada curso?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* Si al patio del ejercicio anterior bajan también los 90 alumnos de 3º de ESO ¿cuántos alumnos habrá en cada fila? ¿Cuántas filas de cada curso?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

* El día 1 de Enero del año 2.000 parten 3 satélites. El primero regresa cada 98 años, el segundo cada 140 y el tercero cada 182, volviéndose a lanzar una y otra vez.

a) ¿Cuántos años pasarán hasta que coincidan los tres por primera vez?

b) ¿Cuántos viajes habrá realizado cada uno?

DATOS	PLANTEAMIENTO	SOLUCIÓN

- Se quiere embaldosar el suelo de una habitación de 256 dm de larga por 96 dm de ancha con baldosas cuadradas del mayor tamaño posible. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada baldosa? ¿Cuánto costará la obra si cada baldosa vale 150 ptas?
- Tres autobuses pasan por una misma parada. El primero cada 60 minutos, el segundo cada 150 minutos y el tercero cada 360 minutos. ¿Cada cuánto tiempo coincidirán los tres en la misma parada?
- Juan va a visitar a su abuela cada 5 días y su primo Enrique cada 7. Si coinciden hoy día 6 de Enero ¿qué día volverán a coincidir la próxima vez?
- ¿Cuál es el volumen del mayor trozo cúbico que cabe exactamente en dos cajas de 276 y 345 cm cúbicos de volumen? ¿Cuántos trozos cabrán exactamente en dichas cajas?
- Un motorista tarda en recorrer una pista circular 108 sg. y otro 120 sg. Si los dos salen al mismo tiempo de la meta. ¿Cuándo volverán a coincidir en la misma? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno?
- Un frutero tiene 180 kg de peras y 160 kg de manzanas. Quiere ponerlas en bolsas iguales. ¿Cuántos kg. podrá poner en cada bolsa como máximo? ¿Cuántas bolsas necesitará para cada fruta?
- Un pasillo de 860 cm de largo y 240 cm de ancho se ha embaldosado con baldosas cuadradas del mayor tamaño posible. Calcula las dimensiones de cada baldosa y cuántas se han empleado
- ¿De cuántas formas se pueden colocar 24 árboles para que formen rectángulo?
- Al contar las canicas de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6, un niño halla que cada vez le sobran 2. ¿Cuántas canicas tiene sabiendo que su número está comprendido entre 100 y 150?
- Un comerciante quiere comprar canicas de 16 ptas y de 29 ptas. para venderlas a 24 ptas. ¿Cuántas debe comprar de cada clase como mínimo para venderlas sin perder ni ganar nada?
- ¿Qué números, múltiplos comunes a 20 y 16, hay entre 300 y 600?
- Halla el menor número que dividido por 5, 6 y 8 dé siempre de resto 4
- El agua de tres garrafas de 18, 24 y 36 litros se quieren envasar en bidones iguales del mayor tamaño posible. ¿Qué capacidad debe tener cada bidón? ¿Cuántos necesitaremos?
- Una caja contiene menos de 100 caramelos y contándolos de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6, sobran siempre 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene la caja?
- Pilar cuenta con frecuencia el número de monedas de 100 ptas que tiene en su hucha. Al preguntarle su hermano Vicente cuánto dinero tiene le contestó: "Si agrupo las monedas en grupos de 11 me sobran 5 pero si las agrupo de grupos de 23 me sobran 3". ¿Sabrías decirle a Vicente el número de monedas que tiene Pilar?
- Al intentar agrupar los músicos de una banda en grupos de dos personas nos sobraba uno, al intentar hacerlo en grupos de tres también sobraba uno. Si la banda tiene entre 20 y 30 músicos ¿cuál es el número exacto de músicos de la banda?
- En una clase hay 24 alumnos y en otra 32. Para hacer una actividad de Geografía, se forman en cada clase grupos del mismo número de alumnos, de manera que haya el menor número de grupos posible. ¿Cuántos grupos se forman en total? ¿Cuántos alumnos componen cada grupo?
- Queremos cerrar una parcela rectangular que mide 36 m. de largo por 28 m. de ancho colocando estacas que estén situadas a la misma distancia las unas de las otras. Si en cada una de las cuatro esquinas del terreno tiene que haber una estaca y pretendemos que el número de estacas sea el mínimo posible ¿cada cuántos metros deberemos colocar cada una? ¿cuántas necesitaremos?
- Juan tiene dos tableros de madera y decide construir una estantería para colocar su colección de discos compactos. Uno de los tableros mide 75 cm y el otro 50 cm. Los quiere cortar en trozos de la misma

medida que sean lo más largos posible y quiere aprovechar toda la madera. ¿cuánto ha de medir cada trozo? ¿cuántos trozos obtendrá en total?

- 19.- Una peluquería dispone de 7 secadores que puede utilizar al mismo tiempo. Si cada uno de ellos tarda media hora en secar el cabello ¿cuánto tiempo tardarán en secar a 29 personas?
- 20.- Dos ruedas dentadas forman parte del engranaje de una máquina. Una de las dos ruedas tiene 12 dientes y la otra tiene 18. Si ponemos en marcha la máquina, ¿después de cuántas vueltas cada rueda volverá a la posición inicial?