

ÁLGEBRA

ÁLGEBRA: Parte de la Matemática que estudia las expresiones algebraicas

EXPRESIÓN ALGEBRAICA: Conjunto de números y letras relacionados por los signos de las operaciones aritméticas

$$\text{Ej.: } x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 3x - 7$$

CLASES:

ENTERA: no tiene denominador literal ni exponentes negativos que afecten a sus letras.

$$\text{Ej.: } 4a^2 - 5bx$$

$$\frac{3}{5}ab^2 - c\sqrt{7}$$

FRACCIONARIA: tiene el denominador literal o exponentes negativos que afecten a sus letras

$$\text{Ej.: } \frac{x^3 - 27}{x - 3} ; \frac{2a}{5x + 3} ; \frac{a^3 + bc}{c^2 + d} ; 5xa^{-2}$$

RACIONAL: no tiene letras bajo el signo radical, ni exponentes fraccionarios que afecten a las letras

$$\text{Ej.: } 4a^3 - \sqrt{7} ; 6ab^2 - a\sqrt{3}$$

IRRACIONAL: tiene letras bajo el signo radical o exponentes fraccionarios que afectan a las letras

$$\text{Ej.: } 4a - \sqrt{8a^2 - 5b^2} ; 5x^2 - \sqrt{x^2 + 9} ; a^{\frac{3}{4}}$$

TÉRMINO: Expresión algebraica separada de otra por los signos (+) ó (-)

$$\text{Ej.: } 6a^4 \quad (\text{expresión algebraica de un solo término o monomio})$$

$$3a^2 - 7 \quad (\text{expresión algebraica de dos términos o binomio})$$

$$3x^2 - 4x + 3 \quad (\text{expresión algebraica de tres términos o trinomio})$$

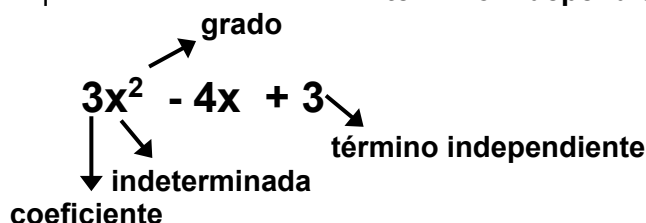
En general cuando una expresión algebraica tiene varios términos se llama polinomio

Los números que acompañan a las letras se llaman **coeficientes**

Las letras se llaman **indeterminadas o variables**

La suma de los exponentes de sus letras se llama **grado**

El número que no tiene letra se llama **término independiente**



VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA: Es el resultado de reemplazar cada letra por un valor previamente asignado y efectuar las operaciones indicadas

$$\text{Ej.: } \frac{3a(a^2 - b^2)}{5a - 4} \quad a = 5 \quad b = 2 \Rightarrow \frac{3 \cdot 5(5^2 - 2^2)}{5 \cdot 5 - 4} = \frac{15 \cdot 21}{21} = 15$$

$$5a^4b^3c \quad a = 2, b = 3, c = 4 \Rightarrow 5 \cdot 2^4 \cdot 3^3 \cdot 4 = 8.640$$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES: Son aquellas que adquieren igual valor numérico al dar a sus letras el mismo valor

$$\text{Ej.: } 3x + 4ax - 5bx = (3 + 4a - 5b)x$$

$$x(7 - 3a) = 7x - 3ax$$

MONOMIO: Expresión algebraica de un solo término. Ej.: $3x^2y^3z^4$

GRADO DE UN MONOMIO: Es la suma de los exponentes de sus letras.
El monomio $3x^2y^3z^4$ es de noveno grado

MONOMIOS SEMEJANTES: Son los que tienen la misma parte literal

Ej.: $13a^2b^3x$; $-5a^2b^3x$; $\frac{3}{7}a^2b^3x$ son semejantes

OPERACIONES CON MONOMIOS:

- **Suma de monomios:** Para sumar monomios deben ser semejantes.

La suma de varios monomios semejantes se suman los coeficientes y se deja la misma parte literal

$$\text{Ej.: } 6a^2b^3c + 5a^2b^3c + 12a^2b^3c = 23a^2b^3c$$

$$5a^3b^2c - 6a^3b^2c - 4a^3b^2c = -5a^3b^2c$$

Si los monomios no son semejantes no se pueden sumar.

- **Producto de monomios:** Para multiplicar monomios se multiplican los coeficientes y la parte literal

$$\text{Ej.: } 3a^3b^2c \cdot 2a^2b^2c \cdot (-4ab^3c^3) = -24a^6b^7c^5$$

Para multiplicar monomios no es preciso que sean semejantes

- **División de monomios:** Para dividir monomios se dividen los coeficientes y la parte literal

$$\text{Ej.: } -15a^6b^4c^2 : 3a^5b^4c = -5ac$$

$$3a^4b^3c : (-5abc^2) = -\frac{3}{5}a^3b^2c^{-1}$$

BINOMIO: Expresión algebraica de dos términos.

$$\text{Ej.: } 3x^3 - 2x$$

TRINOMIO: Expresión algebraica de tres términos

$$\text{Ej.: } 5x^2 - x + 7$$

POLINOMIO: Suma algebraica de varios monomios. Cada uno de los monomios se llama término del polinomio

$$\text{Ej.: } 2x - 5x^4 + 4x^2$$

$$3x^5y^4 - 7x^3y^2 - 9xy^6$$

GRADO DE UN POLINOMIO: Es el de su término de mayor grado

$$\text{Ej.: } 2x - 5x^4 + 4x^2 \quad \text{es de cuarto grado}$$

$$3x^5y^4 - 7x^3y^2 - 9xy^6 \quad \text{es de noveno grado}$$

POLINOMIOS HOMOGÉNEOS: Son aquellos cuyos términos son todos de igual grado

$$\text{Ej.: } 7x + 5y - 3z$$

$$-\frac{2}{5}zx^3 - 9x^3y^2 + 5x^3$$

POLINOMIO ORDENADO: Es aquel cuyos términos se colocan en orden creciente o decreciente de sus grados respecto de una indeterminada llamada ordenatriz

$$\text{Ej.: } 3a^5b^2 + 4a^4b^6c + 4a^3b + 2a^2b^3 + 5a - 4b \quad \text{es decreciente en } a$$

$$-5 + 3x + 4x^2 - 8x^3 \quad \text{es creciente en } x$$

POLINOMIO COMPLETO: Es el que tiene un término de cada grado desde el mayor hasta el grado cero, que corresponde al término independiente

$$\text{Ej.: } 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 7$$

Si falta algún grado es incompleto

ACTIVIDADES DE REFUERZO: ÁLGEBRA

1.- Clasifica las siguientes expresiones algebraicas

$$5a^2 - 4a^3 b \quad \frac{2a}{3} - \frac{5b^2}{6} \quad \sqrt{a} - \sqrt[3]{5b^2} \quad \frac{\sqrt{a}}{6} - \frac{4a^2b^3}{\sqrt{6a}}$$

2.- Expresa en lenguaje algebraico

| Lenguaje ordinario | Ex. algebraica |
|--|----------------|
| El triple de un número | |
| El doble de un número | |
| La suma de dos números es 9 | |
| Un número equivale al triple de otro | |
| El doble del dinero que tengo mas 20 € son 100 € | |
| La quinta parte de los/as alumnos/as de mi clase son 7 alumnos | |
| Mi edad y la de mi padre, que es el triple que la mía, suman 52 años | |
| La suma del doble de un número y 7 unidades | |
| El doble de la suma de dos números | |
| La mitad de un número menos la cuarta parte de otro | |
| El triple de la cuarta parte de la suma de dos números | |
| La suma de los cuadrados de dos números | |
| El cuadrado de la suma de dos números | |
| El quíntuplo del cuadrado de un número | |
| El quíntuplo de un número al cuadrado | |
| La suma de su edad más 20 años | |
| La mitad de su edad menos 3 años | |
| La edad que tenía hace 7 años | |
| La edad que tendrá dentro de 5 años | |
| El doble de la edad de una persona son 28 años | |
| La suma de un número y su cuadrado es 12 | |
| El área de un rectángulo cuya altura mide el doble de la base | |
| El triple de mi dinero mas 10 € son 42 € | |
| El triple de la suma de dos números | |
| La diferencia de un número y su cuadrado | |
| La suma de los cubos de dos números | |
| Si a la mitad de un número se le resta 4, queda 5 | |
| El cuadrado de un número más el doble de dicho número | |
| Dos números naturales consecutivos | |
| Dos números pares consecutivos | |
| Un número par | |
| La suma de dos números pares consecutivos | |
| El área de un triángulo de base b y altura h | |
| Un número impar | |

3.- Expresa en lenguaje algebraico

| | |
|---|--|
| En un cesto tengo X manzanas y en otro Y manzanas | |
| Sacar 5 manzanas del primero y 4 del segundo | |
| Añadir 8 manzanas al primero y sacar 3 del segundo | |
| Sacar 7 manzanas del primero y añadirlas al segundo | |
| Añadir X manzanas a los dos cestos | |

| | |
|--|--|
| Carmen tiene X años de edad. Escribe la expresión algebraica que corresponda | |
| Su abuelo tiene el séxtuplo de la edad de Carmen | |
| Su abuela tiene 5 años menos que el abuelo | |
| El padre tiene el triple de la edad de Carmen menos 1 año | |
| Su hermano Ramón tiene 3 años menos que Carmen | |
| El hermano menor tiene la mitad de la edad de Ramón | |

| | |
|--|--|
| Carmen tiene X años de edad. Escribe la expresión algebraica que corresponda | |
| El doble de la edad de una persona son 28 años | |
| La suma de un número y su cuadrado es 12 | |
| El triple de mi dinero más 10 € suma 42 € | |
| Si a la mitad de un número se le resta 4, queda 5 | |
| El área de un rectángulo cuya altura mide el doble de la longitud de la base | |

3.- Halla el valor numérico del polinomio: $6x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 4$ $x = -2$

4.- Calcula el valor numérico de la expresión algebraica $a + 5b^2 - 2c$ cuando:

a) $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$ b) $a = 2$; $b = -1$; $c = 0$ c) $a = 6$; $b = -1$; $c = -2$

5.- Calcula el valor numérico de:

a) $12a^3b^2c^3$ b) $14a^2b^3c^2$ si $a = -3$; $b = 2$; $c = 1$

6.- Comprueba si las siguientes expresiones algebraicas son equivalentes:

$$(a + b)(a - b) \quad y \quad a^2 - b^2$$

$$a(b + c) \quad y \quad a \cdot b + a \cdot c$$

7.- Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas

$a = -3$; $b = 2$; $c = 12$

| | | |
|---|--|--|
| a) $12a^3b^2c + 3a^3b^2c - 5a^3b^2c =$ | b) $3a^3b^2c - 5a^3b^2c =$ | c) $4a^4b^3c^2 - 12a^4b^3c^2 =$ |
| d) $12a^3b^2c \cdot (-5a^2b) =$ | e) $-3a^2b^3 \cdot (-4ab^2c^4) =$ | f) $3a^2b^3c : (-5ab^2c) =$ |
| g) $-16a^4b^2 : 8ab^2c =$ | h) $-14x^3y^2z : (-9xy^4z) =$ | i) $\frac{2}{3}x^6 + \frac{3}{4}x^6 =$ |
| j) $\frac{2}{3}x^7 + 4x^7 = \frac{2}{3}x^7 + 4x^7 =$ | k) $3x^8 + \frac{3}{2}x^8 =$ | l) $2x^3 + \left(4x^3 + \frac{1}{2}x^3\right)$ |
| m) $\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{2}{3}x^2 + x^2\right) =$ | n) $\left[-2x^3 + \frac{7}{2}x^3\right] - \left[4x^3 + (2x^3 - 3x^3)\right] =$ | |

8.- Reduce los monomios semejantes en el polinomio:

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^5 + 4x^2 - 2x^3 + 4x^4 =$$

9.- Reduce los monomios semejantes y ordena en orden decreciente el polinomio resultante:

$$2x^3 + 4x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x =$$

10.- Halla el valor numérico del polinomio: $6x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 4$ $x = -2$

Aplicación práctica: Calcular el valor numérico de un polinomio.

1. Calcular el valor numérico de $P(x) = 5x^3 + 8x^2 - 3x + 4$ para $x = 3$

$$P(3) = 5 \cdot (3)^3 + 8 \cdot (3)^2 - 3 \cdot (3) + 4 = 5 \cdot 27 + 8 \cdot 9 - 3 \cdot 3 + 4 = \\ = 135 + 72 - 9 + 4 = 202; \quad \boxed{P(3) = 202}$$

2. Calcular el valor numérico de $P(x) = -\frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{4}x^2 + 4x - 2$ para $x = -1$

$$P(-1) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)^5 + \frac{3}{4} \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 2 = \\ = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) + \frac{3}{4} \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - 2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 4 - 2 = \\ = \frac{5}{4} - 6 = -\frac{19}{4}; \quad \boxed{P(-1) = -\frac{19}{4}}$$

3. Calcular $P\left(\frac{1}{2}\right)$ siendo $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ = 3 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \\ = \frac{3}{16} - \frac{4}{8} + \frac{2}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{16}; \quad \boxed{P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{16}}$$

Fijándote en la aplicación anterior resuelve las actividades siguientes:

actividades

1.- Calcula el valor numérico del monomio $\frac{2}{3}x^5$ para $x = \frac{1}{2}$ y para $x = -1$.

2.- Calcula el valor numérico de los monomios $4x^2$ y $-2x^3$ para el valor $x = -\frac{1}{3}$.

3.- Ordena el polinomio

$$P(x) = 3x + 4x^2 + 7 + 5x^4$$

¿Cuál es su grado? Calcula $P(-1)$.

4.- Dados los monomios $4x^3$, $5x^2$, $3x$ y 2 , calcula sus valores numéricos para $x = -1$.

5.- Forma un polinomio ordenado con los monomios de la actividad anterior y calcula su valor numérico para $x = -1$.

6.- ¿Qué relación existe entre las soluciones de las dos últimas actividades?

7.- Calcula $P_1\left(\frac{2}{3}\right)$ y $P_2\left(\frac{2}{3}\right)$ siendo:

$$P_1(x) = ax^2 - \frac{3}{2}x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}$$