SISTEMAS DE ECUACIONES

Los 4 métodos principales para resolver sistemas de ecuaciones lineales son: **sustitución**, **igualación**, **reducción** (suma y resta) y el método **gráfico**. Estos métodos buscan encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

- **Método de Sustitución:** Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su expresión en la otra ecuación.
- **Método de Reducción (Suma y Resta):** Consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por números tales que, al sumarlas o restarlas, se elimine una de las incógnitas
- **Método de Igualación:** Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones para luego igualar las expresiones resultantes.
- **Método Gráfico:** Se representan las ecuaciones como rectas en el plano cartesiano; la solución es el punto de intersección

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El método de sustitución es una técnica algebraica para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en despejar una incógnita en una ecuación y sustituir su expresión en la otra, convirtiendo el sistema en una ecuación con una sola variable, facilitando su resolución. Es ideal cuando una incógnita ya está despejada o es fácil de despejar.

Ej.: $3x + 2y = 1$
$x - 5y = 6$

Lo más fácil es despejar la x en la segunda ecuación

$x = 5y + 6$

Sustituimos el valor de x en la otra ecuación, la primera, con lo que el sistema queda reducido a una sola incógnita

$3(5y + 6) + 2y = 1$

Resolvemos la ecuación

$15y + 18 + 2y = 1$
$17y = -18 + 1$
$17y = -17$
$y = -17/17$
$y = -1$

Para hallar el valor de x sustituimos y por su valor en una de las dos ecuaciones

$3x + 2y = 1$
$3x + 2(-1) = 1$
$3x - 2 = 1$
$3x = 2 + 1$
$3x = 3$
$x = 3/3$
$x = 1$

Comprobamos si la solución es correcta sustituyendo las incógnitas por el valor obtenido

$3x + 2y = 1$ $3(+1) + 2(-1) = 1$ $3 - 2 = 1$ $1 = 1$	$x - 5y = 6$ $1 - 5(-1) = 6$ $1 + 5 = 6$ $6 = 6$

La solución es correcta ya que se cumple la igualdad en ambas ecuaciones

MÉTODO DE REDUCCIÓN

El método de reducción consiste en sumar o restar miembro a miembro las ecuaciones para eliminar una de las dos incógnitas y así obtener una ecuación de primer grado con la otra incógnita

Ej.: Resuelve por reducción el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x + y = 6$$
$$4x + 3y = 14$$

Vamos a eliminar la incógnita y para ello multiplicamos a la primera ecuación por (-3)

$$(-3)\ (2x + y = 6)$$
$$-6x - 3y = -18$$

Sumamos miembro a miembro la ecuación obtenida con la otra ecuación del sistema.

(Recuerda la propiedad de las igualdades: Si sumamos miembro a miembro dos o más igualdades obtenemos otra igualdad)

$$\begin{array}{r} -6x - 3y = -18 \\ \underline{4x + 3y = 14} \\ -2x \qquad = -4 \end{array}$$

Multiplicamos a ambos miembros por (-1) para obtener el término de la x en positivo

$$(-1)\ (-2x) = (-1)\ (-4)$$
$$2x = 4$$

Despejamos la x

$$x = 4/2$$
$$x = 2$$

Hallamos el valor de y sustituyendo x por su valor en una de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera, y resolvemos la ecuación

$$2x + y = 6$$
$$2\ (2) + y = 6$$
$$4 + y = 6$$
$$y = 6 - 4$$
$$y = 2$$

Comprobamos si las soluciones son correctas sustituyendo en las ecuaciones las incógnitas por los valores obtenidos.

$2x + y = 6$ $2 \cdot 2 + 2 = 6$ $4 + 2 = 6$ $6 = 6$	$4x + 3y = 14$ $4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 14$ $8 + 6 = 14$ $14 = 14$

La solución es correcta ya que se cumplen las igualdades en ambas ecuaciones.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones, igualar las expresiones resultantes para hallar el valor de una incógnita y, finalmente, sustituir este valor para encontrar la otra incógnita.

Ej.: Resuelve por igualación

$5x – 2y = 2$

$x + 2y = 2$

Despejamos la x en ambas ecuaciones

$5x – 2y = 2$ $5x = 2y +2$ $x = \frac{2y+2}{5}$	$x + 2y = 2$ $x = - 2y +2$

Igualamos los valores de x obtenidos para reducir el sistema a una sola ecuación con una incógnita

$$\frac{2y+2}{5} = -2y + 2$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$2y + 2 = 5(- 2y + 2)$$
$$2y + 2 = - 10y + 10$$

$$12y = 8$$
$$y = 8/12$$
$$y = 2 /3$$

Hallamos ahora el valor de x sustituyen la y por su valor en una cualquiera de las ecuaciones

$$5x – 2y = 2$$
$$5x – 2(2/3) = 2$$
$$5x – 4/3 = 2$$
$$5x = 2 + 4/3$$
$$5x = 10/3$$
$$x = \frac{10/3}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Comprobación

$5x - 2y = 2$ $5 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} = 2$ $\frac{10}{3} - \frac{4}{3} = 2$ $\frac{6}{3} = 2$ $2 = 2$	$x + 2y = 2$ $\frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 2$ $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$ $\frac{6}{3} = 2$ $2 = 2$

La solución es correcta ya que se cumplen las igualdades en ambas ecuaciones.

MÉTODO GRÁFICO

El método gráfico para sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en representar ambas ecuaciones como rectas en un plano cartesiano. La solución del sistema es el punto de intersección donde ambas rectas se cruzan, cumpliendo ambas condiciones simultáneamente.

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico se resume en las siguientes fases:
1. Se despeja la incógnita y en ambas ecuaciones.
2. Se construye, para cada una de las dos funciones de primer grado obtenidas, la tabla de valores correspondientes.
3. Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
4. En este último paso hay tres posibilidades:

a.- Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas x e y. **El sistema es compatible determinado**.

b.-Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. El **sistema es compatible indeterminado**.

c.- Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. El **sistema es**

Ej: Determinar cuáles de los puntos (1.3), (0,2) o (2,7) es una solución para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4x + y = -1 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$$

1. Despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones

$$y = 4x - 1$$
$$y = 2x + 3$$

2. Construimos una tabla de valores

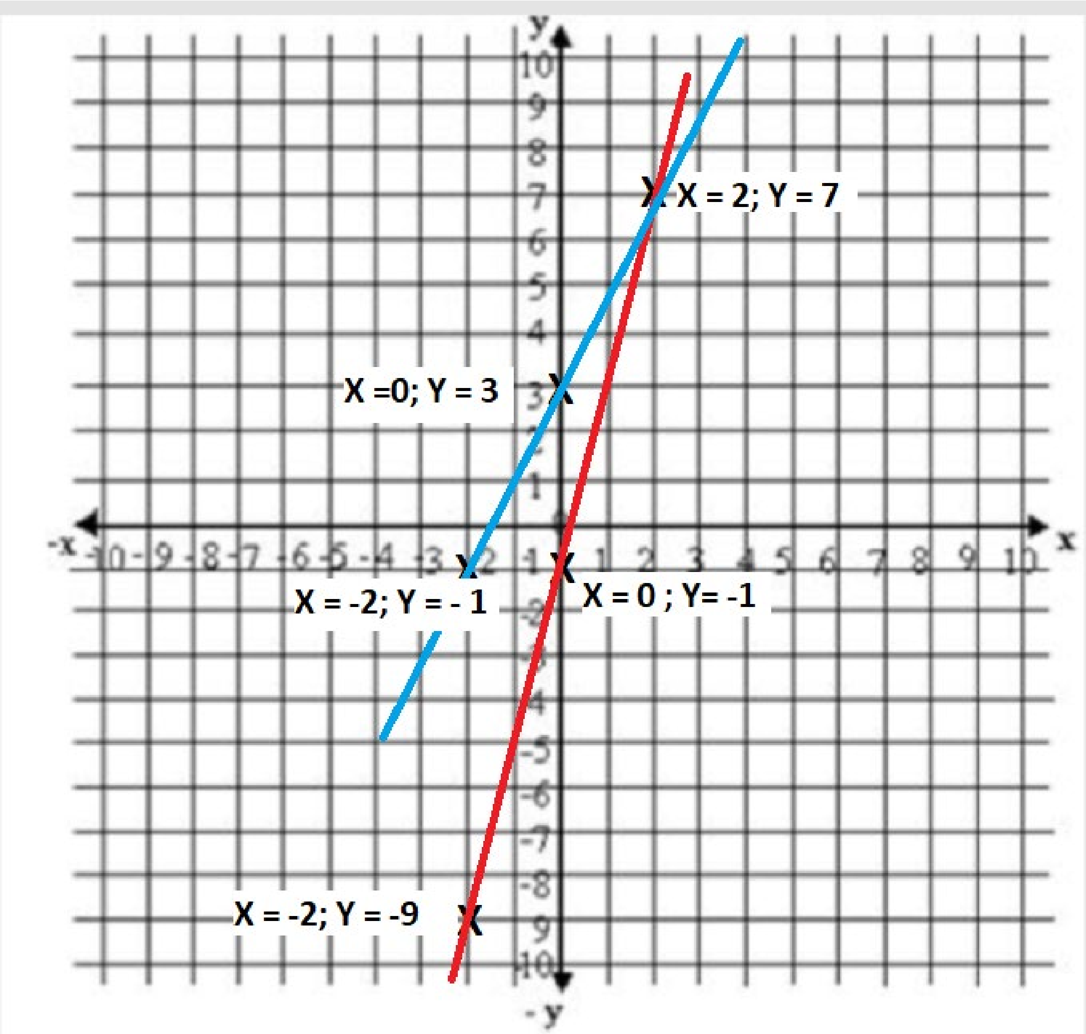
Para la ecuación y = 4x - 1

x	- 2	0	+2
y	4 (-2) – 1 = -8 -1 = - 9	4 · 0 – 1 = - 1	4(+2) -1 = 7

Para la ecuación y = 2x +3

x	- 2	0	+2
y	2(-2) +3 = -1	2 · 0 + 3= +3	2(+2) +3 = +7

3. Construimos la gráfica en un diagrama cartesiano de cada una de las ecuaciones



4. Las coordenadas del par ordenado donde se corten las dos rectas nos dará la solución de la ecuación.
   La solución será: x = 2 ; y = 7

Ej 2: Las rectas de la gráfica se cortan en el par ordenado (2,1). ¿Es esta la solución para el sistema

$$\begin{cases} -3x + y = -5 \\ \;\; 2x + y = 5 \end{cases}$$

1.- Despejamos la y en ambas ecuaciones

$$y = 3x - 5$$
$$y = -2x + 5$$

2.- Construimos una tabla de valores

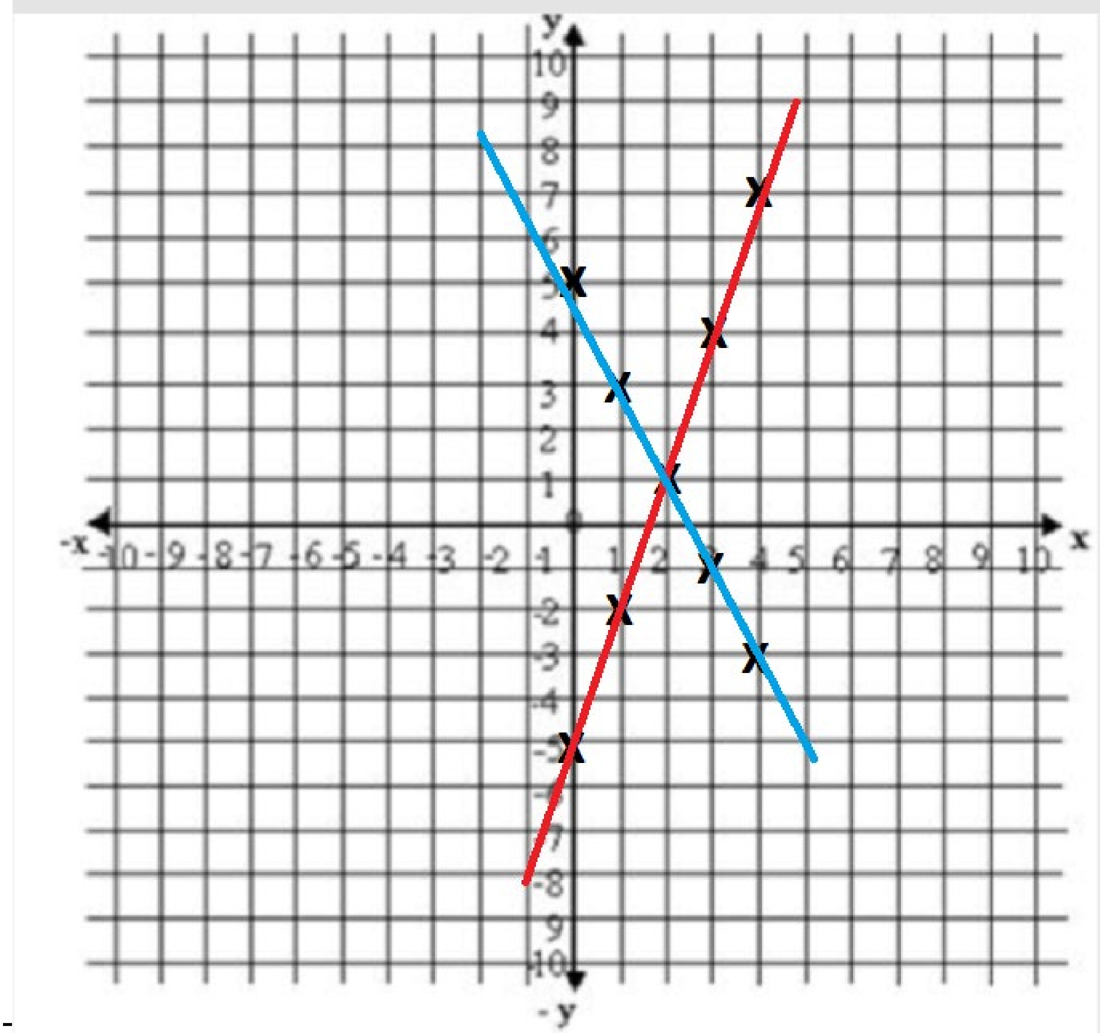
Para la ecuación y = 3x – 5

X	0	1	2	3	4
Y	3 · 0 – 5 = -5	3 · 1 – 5 = -2	3 · 2 – 5 = 1	3 ·3 – 5 = 4	3 · 4 – 5 = 7

Para la ecuación y = - 2x + 5

X	0	1	2	3	4
Y	- 2 · 0 + 5 = 5	- 2 · 1 + 5 = 3	-2 · 2 + 5 = 1	-2 · 3 + 5 = -1	-2 · 4 +5 = - 3

3. Construimos la gráfica de los pares ordenados de cada una de las ecuaciones en un diagrama cartesiano



-

4. Las dos graficas se cortan en el punto x = 2 y = 1 que nos dará el valor de las incógnitas del sistema
   La solución será x = 2; y = 1
   Por tanto, el par ordenado (2 , 1) sí es la solución del sistema

Ej.: 3 Resolver el sistema

$$x + y = 2$$
$$y = 3$$

1.- Despejamos la y en la primera ecuación.

y = - x +2
y = 3

2.- Construimos una tabla de valores

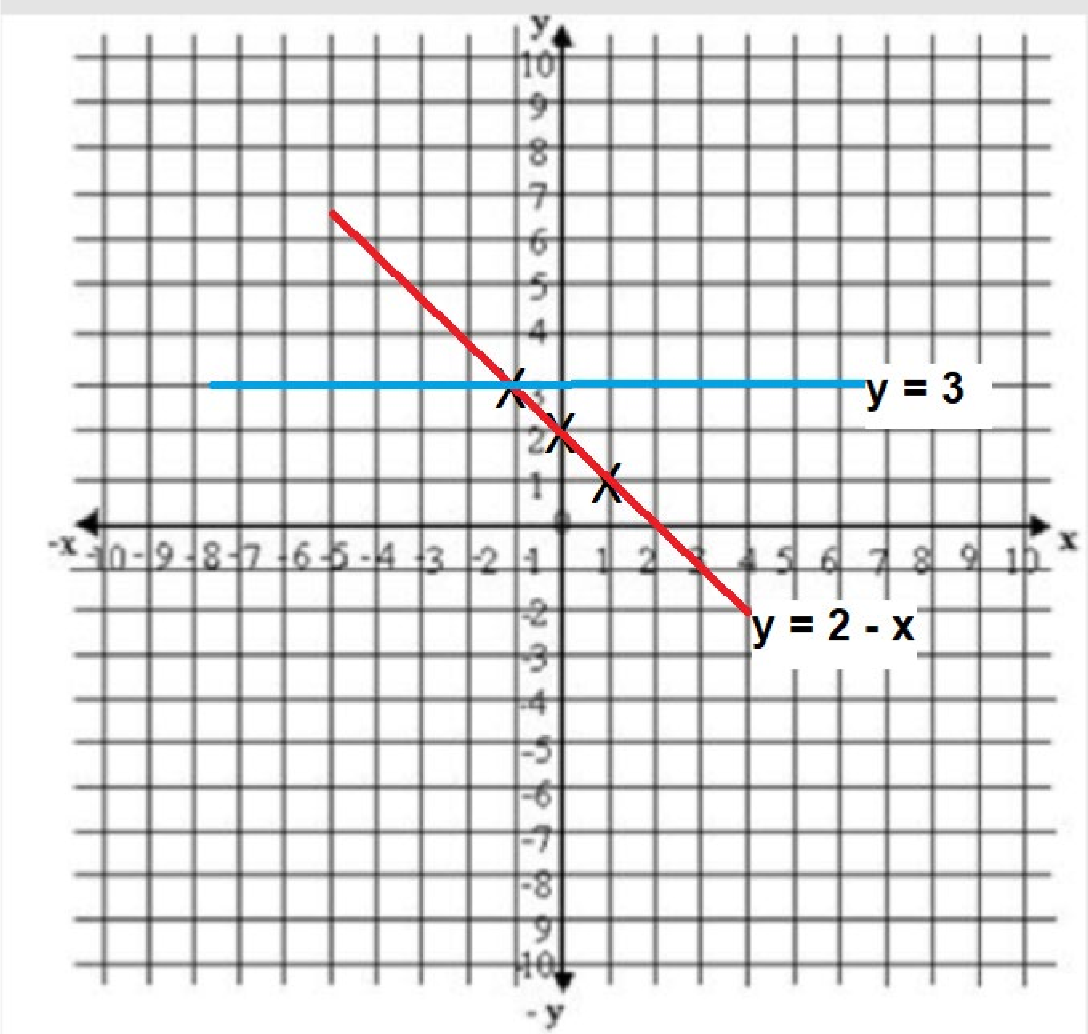
Para y = - x + 2

X	0	1	-1	2
Y	-0 + 2 = 2	- 1 + 2 = 1	-(- 1) + 2 = 3	-2 + 2 = 0

Para y = 3

X	0			
Y	3			

3.- Representamos en un diagrama cartesiano los valores de los pares ordenados obtenidos en las tablas



5. El punto de intersección de las dos rectas corresponde al par ordenado (-1, 3) que serán la solución al sistema de ecuaciones planteado
   Por tanto, x = -1 ; y = 3

Ejercicios resueltos

1.- Entre Ana y Sergia tienen 60 €, pero Sergio tiene el doble de dinero que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Datos:

x = dinero de Ana

y = dinero de Sergio

Planteamiento

$$x + y = 60$$

$$2x = y$$ (para obtener la igualdad multiplicamos por 2 al dinero de Ana)

Resolvemos gráficamente el sistema:

1.- Despejamos la y en ambas ecuaciones

$$y = - x + 60$$

$$y = 2x$$

2.- Construimos la tabla de valores

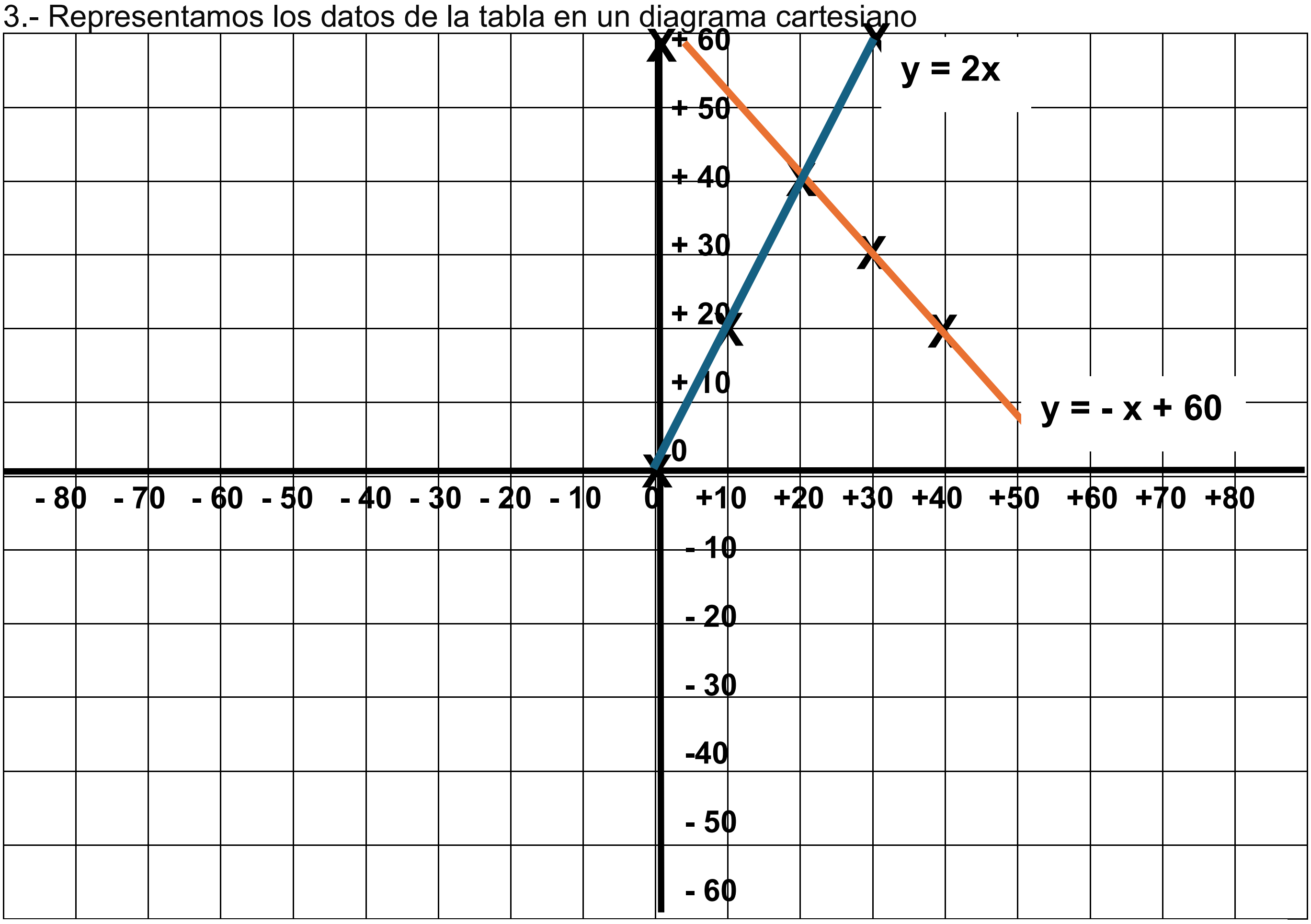
Para la ecuación y = - x + 60

x	0	20	30	40
y	0 + 60 = 60	-20 + 60 = 40	-30 + 60 = 30	- 40 + 60 = 20

Para la ecuación y = 2x

x	0	10	20	30
y	2 · 0 = 0	2 · 10 = 20	2 ·20 = 40	2 ·30 = 60

3.- Representamos los datos de la tabla en un diagrama cartesiano



4.- El punto de intersección de las dos líneas corresponde al par ordenado (20,40).

Por tanto la solución será x = 20, y = 40

x = dinero de Ana = 20 €

y = dinero se Sergio = 40 €

2.- Resolver gráficamente el siguiente sistema

$$\frac{3x}{2} = -y + \frac{7}{2}$$

$$2x = y$$

1.- Despejamos la *y* en ambas ecuaciones

$$y = -\frac{3x}{2} + \frac{7}{2}$$

$$y = 2x$$

2.- Hacemos la tabla de valores

Para la ecuación

$$y = -\frac{3x}{2} + \frac{7}{2}$$

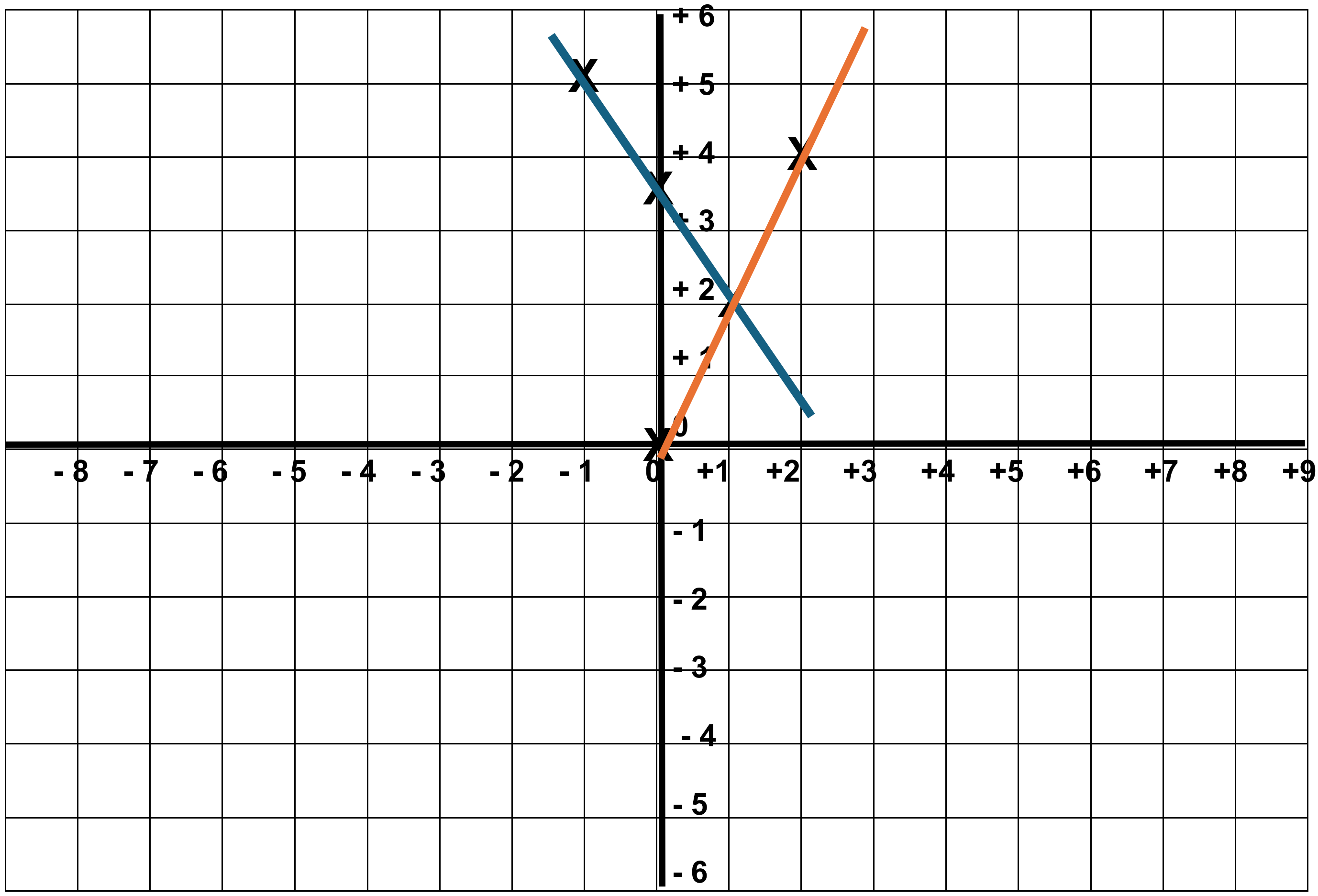
X	0	1	- 1
Y	$\frac{7}{2} = 3{,}5$	$-\frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$	$-\frac{3\,(-1)}{2} + \frac{7}{2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Para la ecuación

$$y = 2x$$

X	0	1	2
y	2 · 0 = 0	2 · 1 = 2	2 · 2 = 4

2.- Representamos los valores de las tablas en un diagrama cartesiano



3.- El punto de intersección de las dos rectas corresponde al par ordenado (+1) , (+2). Por consiguiente la **solución de la ecuación es x = 1 ; y = 2**

3.- Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones

2x + 3y = - 1
4x + 6y = - 2

1.- Despejamos la variable y en cada una de las ecuaciones

$$y = \frac{-2x - 1}{3}$$

$$y = \frac{-4x - 2}{6}$$ simplificando resulta $$y = \frac{-2x - 1}{3}$$

Como podemos comprobar ***y* tiene el mismo valor en las dos ecuaciones por lo que al representarlas en el diagrama cartesiano resultan dos recta superpuestas, tienen infinitos puntos coincidentes, por tanto tiene infinitas soluciones.**
Este sistema se llama compatible indeterminado.

4.- Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones

x + y = 3
2x + 2y = 2

1.- Despejamos la y en ambas ecuaciones

$$y = -x + 3$$

$$y = \frac{-2x+2}{2} = \frac{2(-x+1)}{2} = -x + 1$$

2.- Elaboramos la tabla de valores para cada una de las ecuaciones

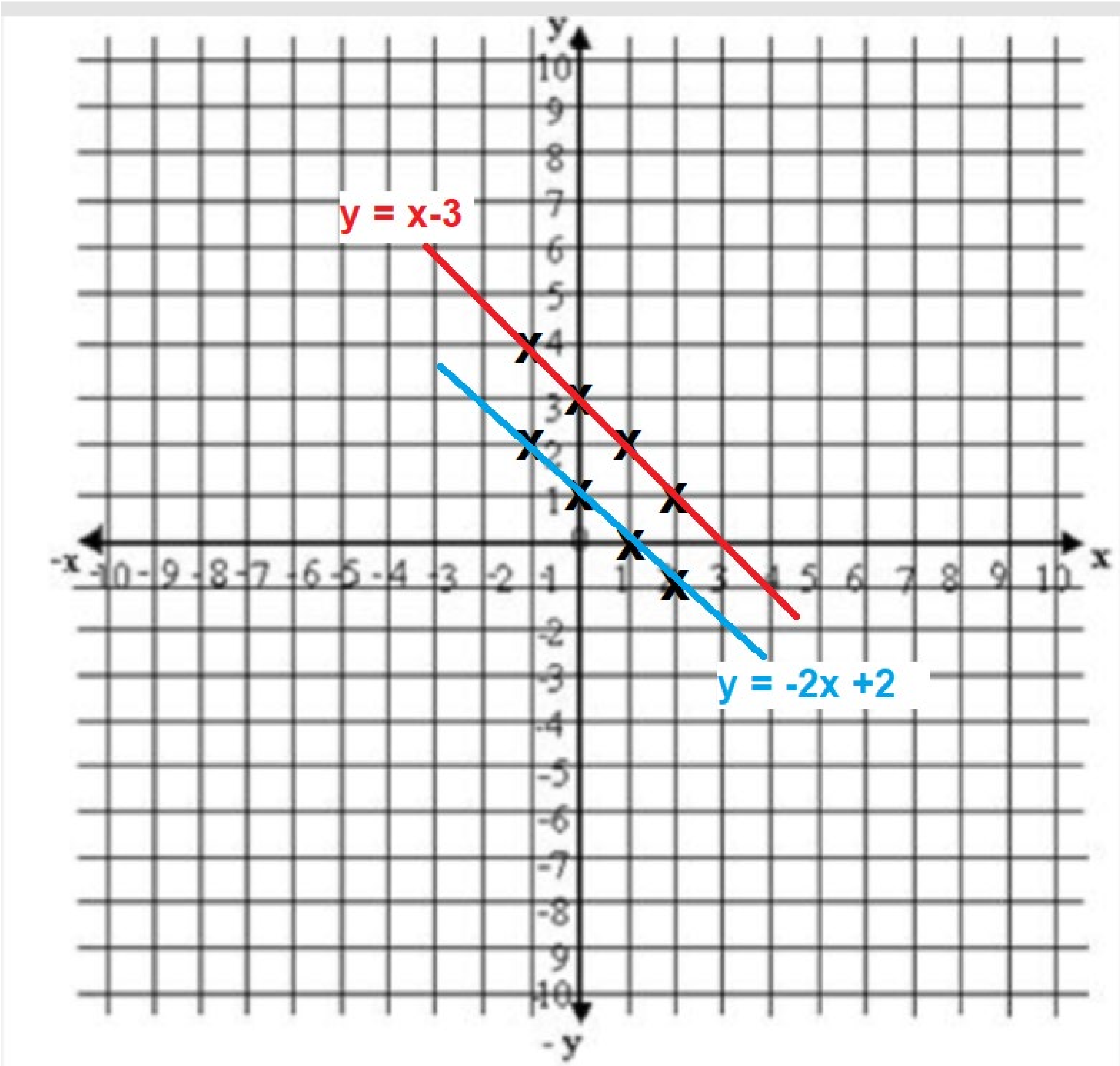
Tabla de valores para la ecuación y = -x + 3

X	-1	0	+1	+2
y	+ 4	+3	2	1

Tabla de valores para le ecuación y = - x +1

X	-1	0	+1	+2
y	2	1	0	- 1

3.- Representamos en un diagrama cartesiano los valores de las tablas



4.- Vemos en el diagrama cartesiano que obtenemos dos rectas paralelas, por tanto no se cortan en ningún punto. **El sistema no tiene solución es un sistema incompatible**

5.- ¿De cuál de estos sistemas es solución el par x = 1 y y = - 3

$$a)\ \begin{cases} 3\,x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x - y\ = 5 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

El sistema b). El par (1, -3) cumple las igualdades sustituyendo los valores en el sistema.
x = 1 ; y = - 3
Comprobación;
Sustituimos en las igualdades los valores de x e y obtenidos para ver si se cumple la igualdad:

$$b)\ \begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + (-3) = -2 \\ 1 - (-3) = 4 \end{cases}$$

La solución es correcta porque se cumple las igualdades en las dos ecuaciones.

6.- Completa los siguientes sistemas para que todos tengan la solución x = 2 e y = - 1

$$a)\ \begin{cases} x + 2y = \\ x - y = \end{cases}$$
$$b)\ \begin{cases} 2\,x - \ y = \\ 3x - y = \end{cases}$$
$$c)\ \begin{cases} -\,x - \ y = \\ 2x + y = \end{cases}$$
$$d)\ \begin{cases} 3\,x + \ y = \\ -2x - 3y = \end{cases}$$

Para que la solución de cada sistema sea x = 2 e y = -1 simplemente debemos sustituir esos valores en las ecuaciones y calcular el número que falta

$$a)\ \begin{cases} x + 2y = \\ x - y = \end{cases}$$

Sustituimos los valores de x e y para obtener la igualdad en cada una de las igualdades

x + 2y =
2 + 2(-1) = 2 – 2 = 0

x – y
2 – (-1) = 2 +1 = 3

La ecuación resultante será x + 2y = 0
x – y = 3

$$b)\ \begin{cases} 2\,x - \ y = \\ 3x - y = \end{cases}$$

2x – y =
2· 2 – (-1) = 4 + 1 = 5

3x – y =
3 · 2 – (-1) = 6 + 1 = 7

La ecuación resultante será x + 2y = 5
x – y = 7

$$c)\ \begin{cases} -x - \ y = \\ 2x + y = \end{cases}$$

- x – y =
- 2 – (-1) = - 2 +1 = -1

2x + y =
2 · 2 + (-1) = 4 – 1 = 3

La ecuación resultante será – x – y = - 1
2x + y = 3

$$d)\ \begin{cases} 3\,x + \ y = \\ -2x - 3y = \end{cases}$$

$3x + y =$

$3 \cdot 2 + (-1) = 6 - 1 = 5$

$-2x - 3y =$

$-2(+2) - 3(-1) = -4 + 3 = -1$

La ecuación resultante será:

$3x + y = 5$

$-2x - 3y = -1$