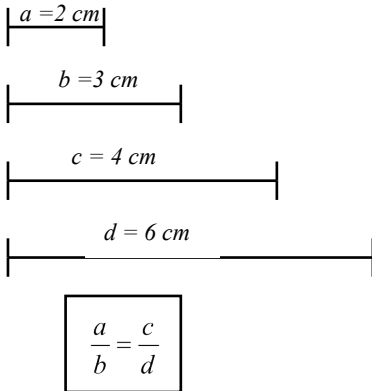


PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA

RAZÓN DE DOS SEGMENTOS:



Observa los segmentos a , b , c y d
 Se llama **razón de dos segmentos al cociente de sus medidas**.
 La razón de los segmentos a y b es:

$$\frac{a}{b} = \frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{2}{3}$$

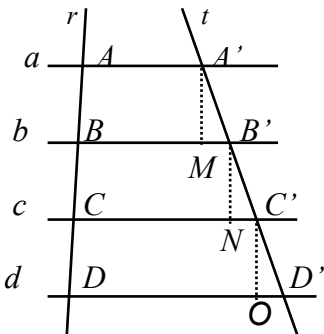
La razón de los segmentos c y d es:

$$\frac{c}{d} = \frac{4 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{2}{3}$$

Fíjate que la razón de los segmentos a y b es igual a la razón de los segmentos c y d . Por eso decimos que los segmentos a y b son **proporcionales** a los segmentos c y d .
Dos segmentos son proporcionales cuando sus razones son iguales
 Se escribe así: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

SEGMENTOS IGUALES ENTRE PARALELAS

Rectas r y t cortadas por paralelas equidistantes



$$AB = BC = CD$$

$$A'B' = B'C' = C'D'$$

1º.- Observa que las rectas a , b , c , y d paralelas y equidistantes determinan en la secante r segmentos iguales:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$$

2º.- Vamos a demostrar que dichas rectas también determinan en la secante t segmentos iguales

En efecto, los triángulos:

$\triangle A'MB'$; $\triangle B'NC'$ y $\triangle C'OD'$ son iguales ya que:

$$A'M = AB$$

$$B'N = BC \quad (\text{por lados opuestos de un paralelogramo})$$

$$C'O = CD$$

Luego los triángulos $\triangle A'MB'$, $\triangle B'NC'$ y $\triangle C'OD'$ tienen los lados $A'M$; $B'N$ y $C'O$ iguales.

Por otro lado los ángulos A' , B' y C' son iguales por correspondientes y los ángulos M , N , O también son iguales por ser ángulos de lados paralelos.

de donde resulta que los triángulos $\triangle A'MB'$; $\triangle B'NC'$ y $\triangle C'OD'$ son iguales por tener los tres ángulos iguales y un lado igual.

Por consiguiente: $A'B' = B'C' = C'D'$

Si varias paralelas determinan en una recta r segmentos iguales, también determinan segmentos iguales en otra recta t secante (que corta) a r .

ACTIVIDADES:

1.- Dibuja 4 segmentos de las siguientes medidas:

$a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 1 \text{ cm}$, $d = 1'5 \text{ cm}$

Contesta: - ¿Cuál es la razón de los segmentos a y b ?

- ¿Cuál es la razón de los segmentos c y d ?

2.- Dos segmentos a y b miden 5 cm y 6 cm respectivamente. Dibuja otros dos segmentos c y d de que sean proporcionales a los anteriores.

3.- La razón de dos segmentos a y b es igual a $1/2$. Si el segmento a mide 12 cm ¿Cuánto mide el segmento b ?

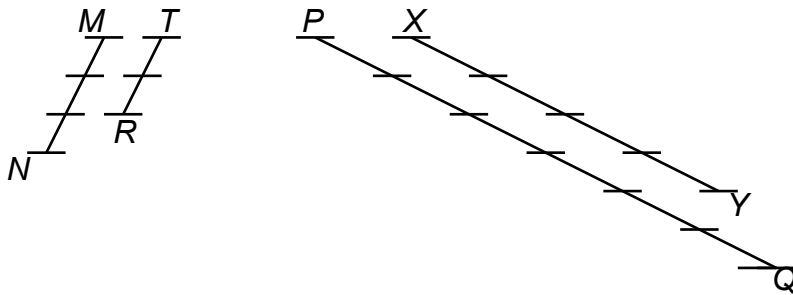
4.- Averigua si son proporcionales los pares de segmentos cuyas longitudes se indican:

a) 5 cm y 10 cm respecto a 15 cm y 20 cm

b) $2,5 \text{ cm}$ y $3,5 \text{ cm}$ respecto a 5 cm y 7 cm

c) 1 dm y 2 cm respecto a 15 cm y 3 cm

5.- Calcula si los segmentos \overline{MN} y \overline{PQ} son propocionales a \overline{TR} y \overline{XY}



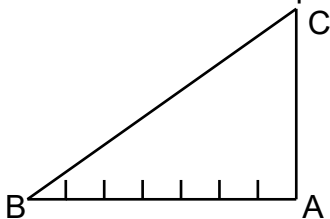
DIVIDIR UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES

Ejercicios prácticos en el encerado

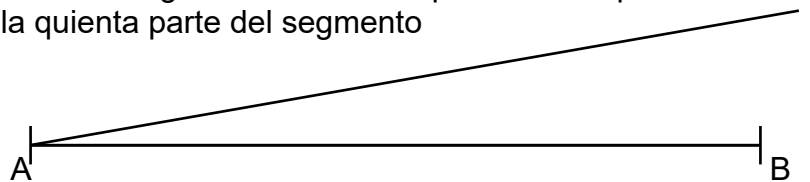
ACTIVIDADES

6.- Dibuja un segmento $AB = 12 \text{ cm}$ y divídelo en 5 partes iguales

7.- El cateto AB de un triángulo rectángulo está dividido en 7 partes iguales. Divide también el cateto AC en siete parte iguales

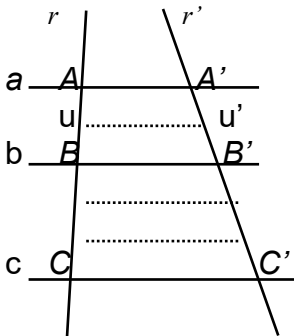


8.- Divide el segmento AB en dos partes tales que una sea la quinta parte del segmento



TEOREMA DE THALES

Rectas r y r' cortadas por paralelas



En la figura observamos las rectas paralelas a , b y c que cortan a las secantes r y r'

Vamos a probar que los segmentos AB , BC de la recta r son proporcionales a los segmentos $A'B'$ y $B'C'$ de la recta r' .

Si medimos los segmentos AB , BC y AC de la recta r con la unidad u y por los puntos de división trazamos paralelas a las rectas a , b y c , obtenemos en la recta r' segmentos iguales entre sí, según hemos visto.

Si medimos los segmentos $A'B'$, $B'C'$ y $A'C'$ de la recta r' con la unidad u' obtendremos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3}; \quad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2u'}{3u'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

de donde:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad [1]$$

De forma análoga obtenemos que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad [2]$$

De las proporciones [1] y [2] se obtiene:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

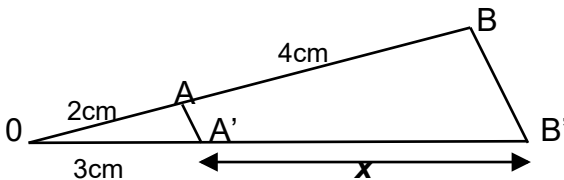
Esta igualdad constituye el **TEOREMA DE THALES**:

Un sistema de paralelas determina sobre dos rectas concurrentes segmentos proporcionales

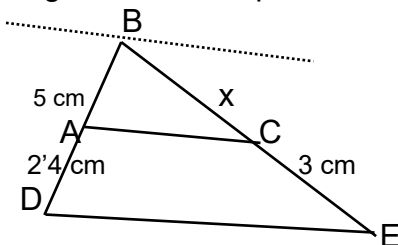
ACTIVIDADES

9.- Observa la figura y responde:

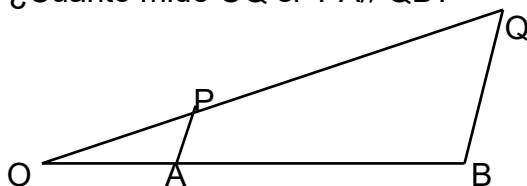
a) ¿Cuál es la longitud del segmento $A'B'$?



10.- El segmento AC es paralelo al segmento DE . ¿Cuánto mide el lado BC del triángulo ABC ?

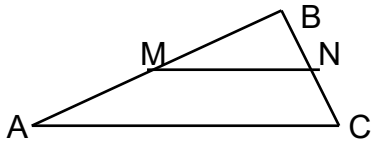


11.- ¿Cuánto mide OQ si $PA \parallel QB$?

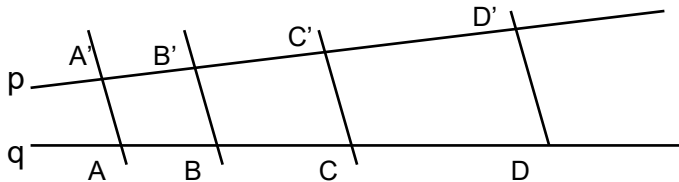


$OP = 2.8$ cm
 $OA = 2$ cm
 $OB = 8$ cm

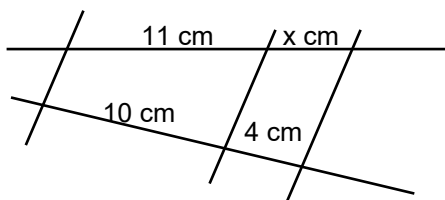
12.- En el triángulo ABC, $AM = BM$ y $MN \parallel AC$. ¿Cómo son los segmentos BN y NC? ¿Por qué?



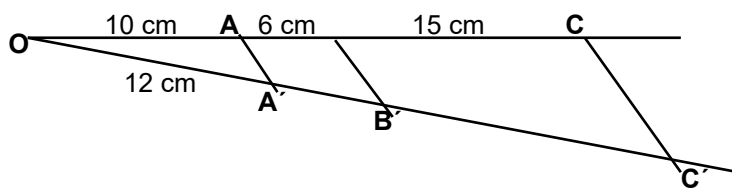
13.- Observa la figura y escribe tres proporciones:



14.- En cada una de estas figuras las rectas a , b y c son paralelas. Calcula el valor de x .



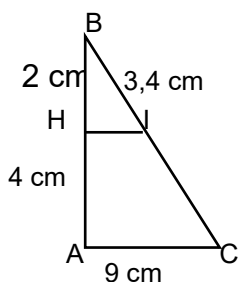
15.- Averigua cuánto miden los segmentos $A'B'$ y $B'C'$



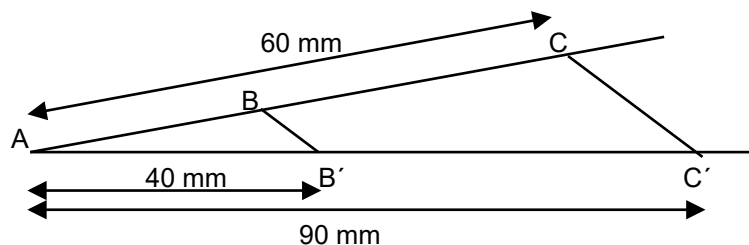
16.- Recuerda la proporcionalidad numérica y:

- Dibuja un segmento cuarto proporcional a otros tres de 10 cm, 5 cm y 6 cm. Comprueba numéricamente el resultado.
- Dibuja dos segmentos de 4 cm y 6 cm y halla su tercero proporcional. Comprueba numéricamente el resultado.

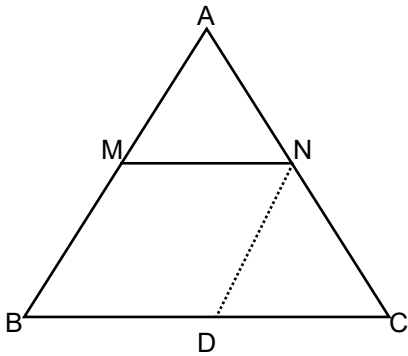
17.- Calcula el perímetro del triángulo ABC sabiendo que HI es paralela a AC



18.- Fíjate en la figura y halla la longitud de AB



TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE THALES



Si en el triángulo ABC se traza una paralela MN a un lado BC se forma otro triángulo AMN. Los triángulos ABC y AMN se dice que están en posición de Thales.

Dos triángulos en posición de Thales tienen sus ángulos respectivos iguales

A es común a los dos triángulos

B = M por correspondientes

C = N por correspondientes

Dos triángulos en posición de Thales tienen sus lados correspondientes proporcionales

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \quad (1)$$

Trazamos ND paralela a MB

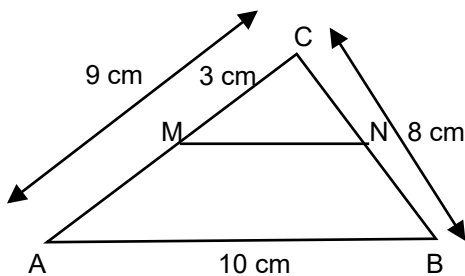
$$\frac{AC}{AN} = \frac{CB}{BD}$$

Como $BD = MN$ por ser lados opuestos de un paralelogramo, los sustituimos en la proporción anterior :

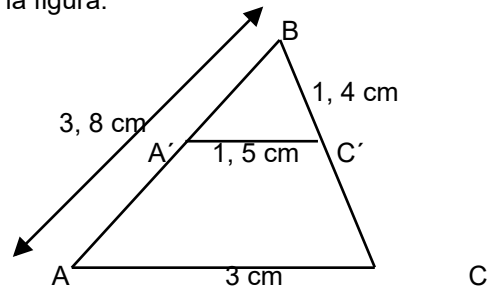
$$\frac{AC}{AN} = \frac{CB}{MN} \quad (2)$$

Relacionando las proporciones (1) y (2) resulta :

18.- Observa la siguiente figura y calcula MN y CN:

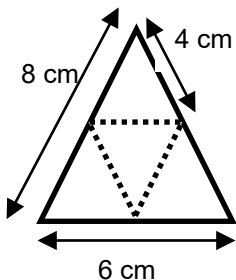
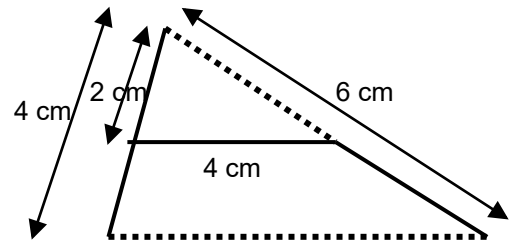
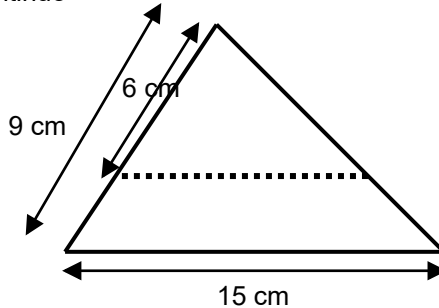
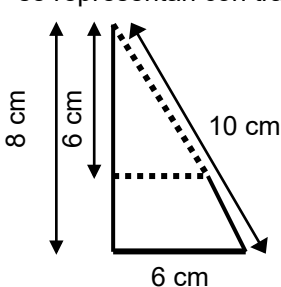


19.- Fíjate en la figura:

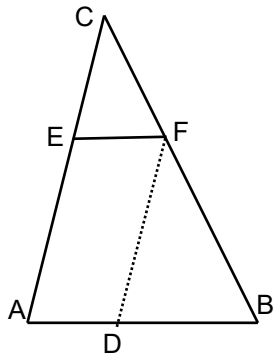


- a) ¿Cuánto miden los lados CB y A'B'?
- b) Calcula la razón de proporcionalidad

20.- Sabiendo que los siguientes triángulos están en posición de Thales halla las medidas de los lados que se representan con trazo discontinuo



- A1.- Una recta paralela a un lado de un triángulo determina sobre un segundo lado dos segmentos de 36 y 14 mm. Halla la longitud de los segmentos determinados en el tercer lado sabiendo que mide 60 mm.
 A2.- Sobre un lado de un ángulo O se tienen los segmentos OA = 19 mm y OB = 35 mm. Sobre el otro lado se tienen OA' = 16 mm y OB' = 56 mm. ¿Son paralelas AA' y BB' ?
 A3.- Si en la figura los lados miden: AC = 48 mm, CB = 54 mm y AB = 36 mm y se toma CE = 32 mm. ¿Qué valor habrá que dar a CF para que EF sea paralela a AB? ¿Cuánto medirá EF?



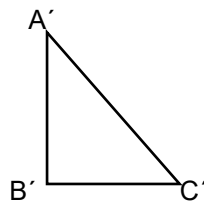
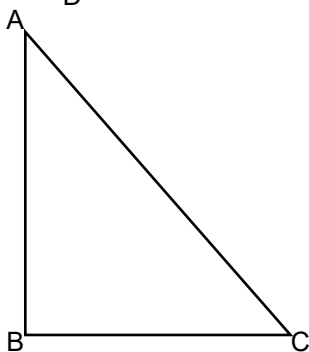
- A4.- Si en la figura se dan CA = 108 m, CE = 72 m y FB = 27 m. Hallar CB y CF
 A5.- Halla la altura de una torre que proyecta una sombra de 45 m sabiendo que en el mismo instante un muro de 3 m da una sombra de 5 m.
 A6.- Una escalera de 10 m. está apoyada contra la pared. El pie de la escalera dista de la pared 1,6 m. Calcula la distancia a la pared de un peldaño sabiendo que está a 2,3 metros del extremo de la escalera que se apoya en el suelo
 A7.-

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

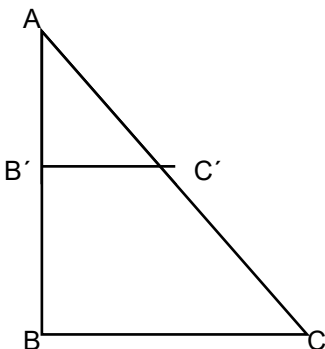
Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivos iguales y los lados correspondientes proporcionales

Los lados que son proporcionales se llaman **homólogos**

La **relación** (cociente) de los lados homólogos se llama **razón de semejanza**



Si ponemos los dos triángulos anteriores en posición de Thales vemos que son semejantes ya que:

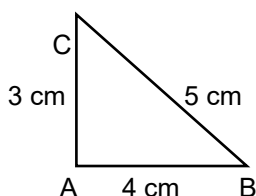


$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A'} ; \hat{B} = \hat{B'} ; \hat{C} = \hat{C'} \\ \frac{AB}{A'B'} &= \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \\ \frac{AB}{A'B'} &= \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2 \quad (\text{RAZÓN DE SEMEJANZA}) \end{aligned}$$

Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivos iguales y sus lados homólogos proporcionales
La relación entre los lados homólogos se llama razón de semejanza
Por tanto dos triángulos en posición de Thales son semejantes

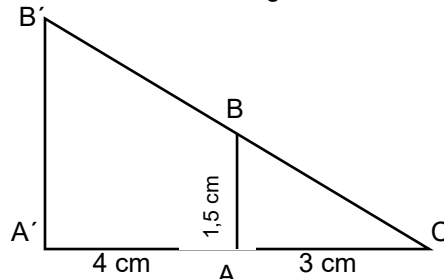
A, B, C

- 21.- Dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes. Sabiendo que A = 60° y B = 70°. Halla
 22.- Halla los lados del triángulo A'B'C' semejante al triángulo ABC de la figura sabiendo que B'C' = 30 cm



¿Cuál es la razón de semejanza $\frac{AB}{A'B'}$?

A1.- Calcula el área del triángulo CA'B' de la figura



CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE THALES

Dos triángulos son semejantes cuando se pueden poner en posición de Tales

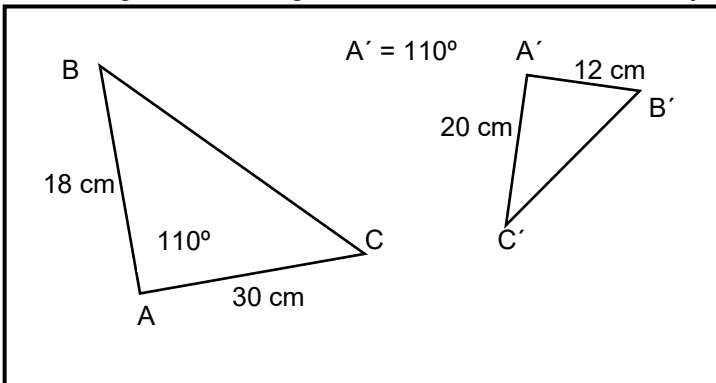
PRIMER CASO DE SEMEJANZA

DOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES SI TIENEN DOS ÁNGULOS RESPECTIVOS IGUALES

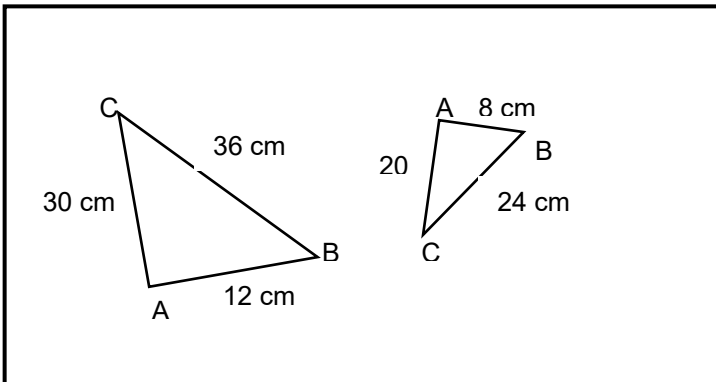
DOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES SI TIENEN UN ÁNGULO IGUAL Y LOS LADOS QUE LO FORMAN SON PROPORCIONALES

DOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES SI TIENEN LOS TRES LADOS CORRESPONDENTES PROPORCIONALES

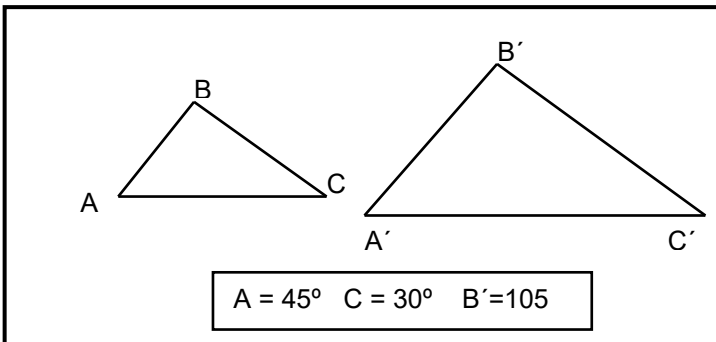
23.- Averigua si los triángulos de cada recuadro son semejantes ¿en que criterio te fundamentas?:



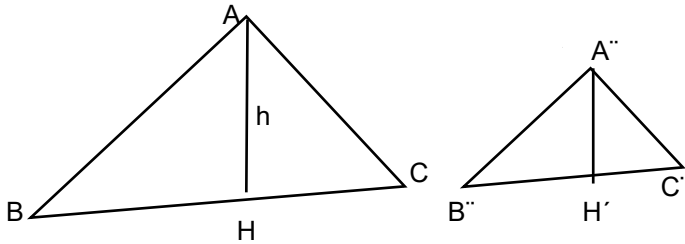
24.- Ricardo sabe que su talla es 1,58 m. Sale con su amigo Fernando a dar un paseo y se detienen junto a un poste de teléfono. Fernando mide la sombra que proyecta Ricardo en ese instante, que resulta ser 2,5 m. ¿Cuál será la altura del poste si proyecta una sombra de 24 m?



25.- Una señal de tráfico indica que la carretera tiene una pendiente del 15 %, es decir que cada 100 m de longitud medidos en horizontal la carretera se eleva 15 m. ¿Qué elevación tendrá la carretera si se han medido 800 m en horizontal?



RAZÓN DE LAS ALTURAS DE DOS POLÍGONOS SEMEJANTES

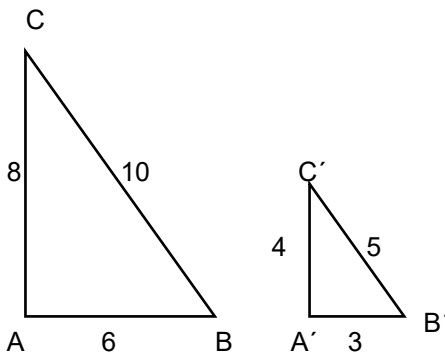


Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes y su razón de semejanza es 2
 Los triángulos AHC y A'H'C' son semejantes (tienen dos ángulos iguales) son triángulos rectángulos y tienen el ángulo C = C' por tanto se cumple:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{h}{h'} = 2$$

EN GENERAL SI DOS POLÍGONOS (TRIÁNGULOS, TRAPECIOS O PARALELOGRAMOS) SON SEMEJANTES LA RAZÓN DE SUS ALTURAS ES IGUAL A LA RAZÓN DE SEMEJANZA

RAZÓN DE LOS PERÍMETROS DE DOS POLÍGONOS SEMEJANTES



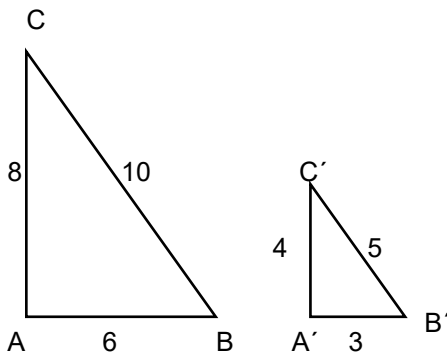
$$\left. \begin{array}{l} \Delta \\ \text{Perímetro } ABC = 24 \\ \Delta \\ \text{Perímetro } A'B'C' = 12 \end{array} \right\} \text{RAZÓN DE LOS PERÍMETROS } \frac{24}{12} = 2$$

RAZÓN DE SEMEJANZA $\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{AB}{A'B'} = K = 2$

Por tanto:

LA RAZÓN DE LOS PERÍMETROS DE DOS POLÍGONOS SEMEJANTES ES IGUAL A LA RAZÓN DE SEMEJANZA

RAZÓN DE LAS ÁREAS DE DOS POLÍGONOS SEMEJANTES



$$\Delta \text{ Área del } ABC = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$\Delta \text{ Área del } A'B'C' = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

RAZÓN DE LAS ÁREAS: $\frac{24}{6} = 4$

RAZÓN DE SEMEJANZA: $\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{1} = 2$

Por tanto:

LA RAZÓN DE LAS ÁREAS DE DOS POLÍGONOS SEMEJANTES ES IGUAL AL CUADRADO DE LA RAZÓN DE SEMEJANZA

Dos POLÍGONOS son SEMEJANTES si:

- Sus **ÁNGULOS RESPECTIVOS SON IGUALES**
- Sus **LADOS HOMÓLOGOS SON PROPORCIONALES**
- La **RAZÓN DE SUS PERÍMETROS ES IGUAL A LA RAZÓN DE SEMEJANZA**
- La **RAZÓN DE SUS ÁREAS ES IGUAL AL CUADRADO DE LA RAZÓN DE SEMEJANZA**

ACTIVIDADES:

26.- a) ¿Cuál es la razón de semejanza

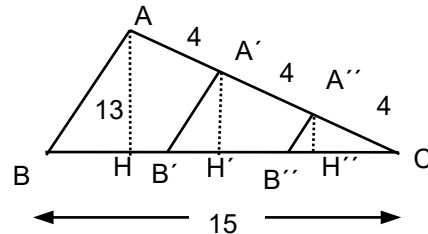
entre $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$?

b) ¿Y la razón de sus perímetros?

c) Si la altura del $\triangle ABC$ es de 13 cm

¿Cuál es la altura de $\triangle A'B'C'$?

d) ¿Y la del $\triangle A''B''C''$?



27.- a) ¿Cuál es la razón de las áreas entre el $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ de la actividad anterior?

b) ¿Y entre el $\triangle ABC$ y $\triangle A''B''C''$?

28.- Si $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son dos triángulos semejantes y la razón de semejanza del primero al segundo es de $3/4$ ¿Cuál será el área del $\triangle A'B'C'$ si la del $\triangle ABC$ es 126 cm^2 ?

29.- Los lados del triángulo $\triangle A'B'C'$ miden el triple que los del triángulo $\triangle ABC$. Si la superficie de $\triangle A'B'C'$ es de 36 cm^2 . ¿Cuál es la razón de semejanza de dichos triángulos? ¿Cuál es el área del triángulo $\triangle ABC$?

30.- La razón de las alturas de dos polígonos semejantes es $16/25$ ¿Cuál es la razón de los lados homólogos?

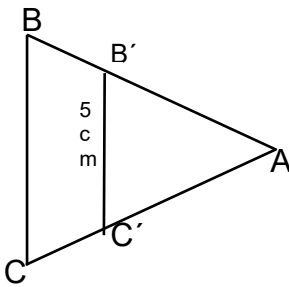
31.- Hallar la razón de las áreas de dos triángulos semejantes si la razón de sus perímetros es $2/5$

32.- La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es $9/25$ y un lado del polígono mide 33 dm. ¿Cuánto medirá su lado homólogo del segundo polígono?

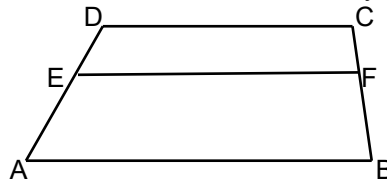
La razón de las áreas es igual a k^2 $\frac{9}{25} = k^2$; $k = \frac{3}{5}$; por tanto: $\frac{3}{5} = \frac{33}{x}$; $x = \frac{33 \cdot 5}{3} = 55 \text{ dm}$

33.- Las bases de un trapecio miden 21 y 35 mm y el triángulo formado por la prolongación de los lados no paralelos y la base menor tiene de área 270 mm^2 . Halla el área del trapecio

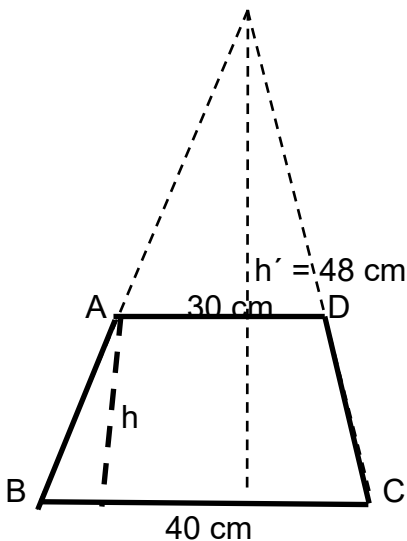
- 34.- Las áreas de dos polígonos semejantes son 144 m^2 y 441 m^2 . Sabiendo que el perímetro del primero es 46 m. ¿Cuál es el perímetro del segundo?
- 35.- Los lados de un triángulo se triplican. ¿Qué le sucede a su área? ¿Por qué?
- 36.- Los lados del triángulo rectángulo ABC miden: $BC = 20 \text{ m}$; $AC = 16 \text{ m}$; $BA = 12 \text{ m}$. Se prolonga el lado AC hasta un punto M situado a 10 cm del punto C. Después se traza por M una paralela a AB que corta en P a la prolongación de BC. ¿Cuánto mide el segmento CP?
- 37.- Los lados de un triángulo miden 4, 10 y 12 cm respectivamente. Calcula los lados de otro triángulo semejante de perímetro 39 cm
- 38.- Un cuadrado tiene de lado 4 cm y otro el doble. ¿Cuál es la razón entre los perímetros? ¿Y entre las áreas?
- 39.- La razón entre las áreas de dos triángulos equiláteros es $1/4$ ¿Cuánto mide el lado del mayor si el menor tiene un perímetro de 6 cm?
- 40.- Las áreas de dos triángulos semejantes miden 50 cm^2 y 18 cm^2 respectivamente. Calcula la razón de semejanza y el perímetro del triángulo mayor si el del menor mide 45 cm
- 41.- Los tres lados de un triángulo miden 4, 5 y 6 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante al anterior cuya área sea nueve veces mayor
- 42.- Observa la figura. Si sabemos que el área del triángulo menor es 16 cm^2 y la del trapecio 20 cm^2 ¿Cuánto mide el segmento $B'C'$?



- 43.- En el trapecio ABCD el segmento EF es paralelo al AB. ¿Qué longitud tendrá BF si $DE = 14 \text{ cm}$, $EA = 20 \text{ cm}$ y $CF = 11 \text{ cm}$?

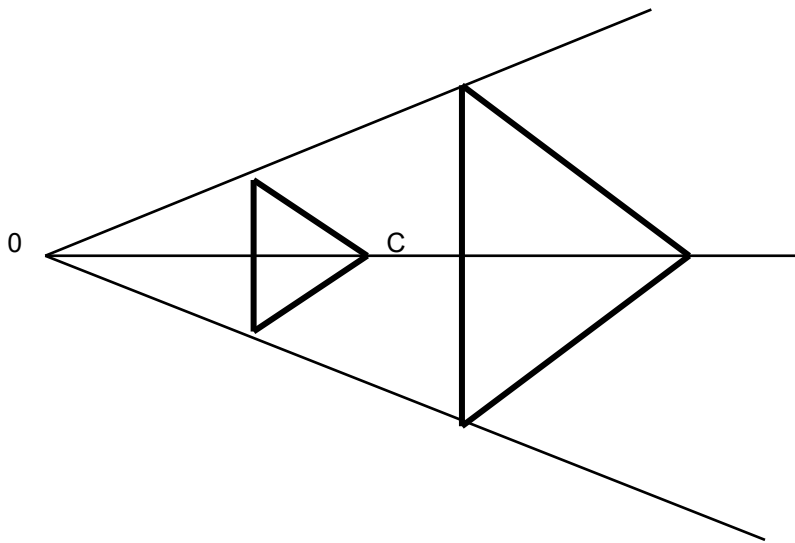


- 44.- En el trapecio ABCD sus bases BC y AD miden respectivamente 40 y 30 cm ¿Cuánto medirá la altura de este trapecio sabiendo que la altura h' de triángulo PAD que se obtiene al prolongar los lados no paralelos AB y CD mide 48 cm?



CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS SEMEJANTES

a) Centro de semejanza en un punto exterior a la figura

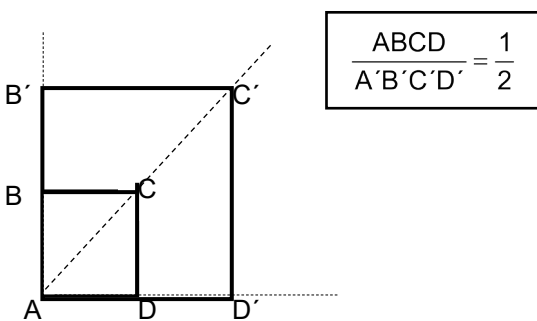


$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{1}{2}$$

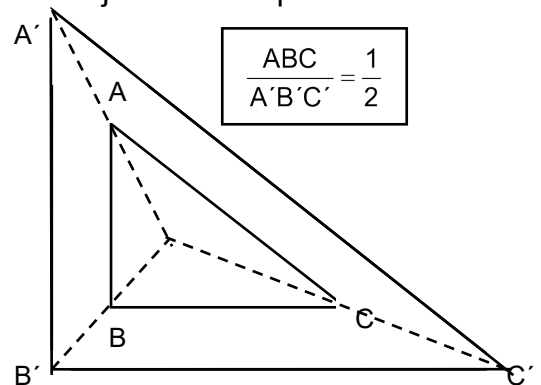
A'
A
C'
B
B'

b) Centro de semejanza en un vértice



$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}$$

c) Centro de semejanza en un punto interior



$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{1}{2}$$

ESCALA COMO RAZÓN DE SEMEJANZA

La escala es la razón de semejanza entre el dibujo y la realidad

ACTIVIDADES:

- 43.- Un plano está hecho a escala 1/100. En la realidad la distancia entre dos puntos es de 120 m. ¿Cuál será su distancia en el plano?
- 44.- En un mapa de escala 1 : 8.000.000 la distancia de Madrid a Burgos es de 2,66 cm. ¿Cuál es en la realidad la distancia de Madrid a Burgos?
- 45.- La distancia de Madrid a Zaragoza es de 320 km. En el plano viene representada por una distancia de 128 cm ¿a qué escala está construido el mapa?