SISTEMAS DR ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TRES INCÓGNITAS (3x3)

Pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas (3x3)

1 Elegir una variable y despejarla en una de las ecuaciones.

Generalmente se elige la variable de la ecuación más sencilla, de forma que despejar la incógnita resulta una expresión lo más sencilla posible.

2 Sustituir en las otras dos ecuaciones.

El valor de la variable obtenida se sustituye en las otras dos ecuaciones. Las dos nuevas ecuaciones que resulten de este paso formarán un sistema de ecuaciones de 2x2 cuya resolución ya se ha **explicado en otra entrada de este blog. (Métodos de resolución de ecuaciones 2x2)**

Ejercicios de sistemas de 3 ecuaciones con tres incógnitas (3x3)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Solución

Para aplicar el método de sustitución, elegimos la ecuación más sencilla y despejamos una variable.
Elegimos la tercera ecuación y despejamos la x

$x + y - z = 1 \Rightarrow x = -y + z + 1$

Sustituimos el valor de la x en las otras 2 ecuaciones restantes

$3x + 2y + z = 1 \Rightarrow 3(-y + z + 1) + 2y + z = 1 \Rightarrow -3y + 3z + 3 + 2y + z = 1$

$5x + 3y + 4z = 2 \Rightarrow 5(-y + z + 1) + 3y + 4z = 2 \Rightarrow -5y + 5z + 5 + 3y + 4z = 2$

Reducimos términos semejantes y realizamos transposiciones hasta obtener ecuaciones lo más sencillas posible

$-3y + 3z + 3 + 2y + z = 1 \Rightarrow -y + 4z = 1 - 3 \Rightarrow -y + 4z = -2$

$-5y + 5z + 5 + 3y + 4z = 2 \Rightarrow -2y + 9z = 2 - 5 \Rightarrow -2y + 9z = -3$

Resulta un nuevo sistema de ecuaciones de 2x2

$-y + 4z = -2$

$-2y + 9z = -3$

Aplicamos nuevamente el método de sustitución, es decir, elegir una ecuación y una variable para despejar. La más sencilla en este caso es la primera con la variable y.

$-y + 4z = -2 \Rightarrow -y = -4z - 2$

multiplicamos por (-1) a los dos miembros de la ecuación para obtener la incógnita y en positivo.

$(-1)(-y = -4z - 2) \Rightarrow y = 4z + 2$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación

$-2y + 9z = -3$

$-2(4z + 2) + 9z = -3 \Rightarrow -8z - 4 + 9z = -3$

Reducimos términos semejantes y realizamos transposiciones hasta obtener ecuaciones lo más sencillas posible

$$- 8z + 9z = 4 - 3$$
$$z = 1$$

Como ya tenemos que $z=1$**, sustituimos su valor en una de las dos ecuaciones del sistema con dos incógnitas**

$$- 2y + 9\,z = - 3$$
$$- 2y + 9 \cdot 1 = - 3$$

Reducimos términos, hacemos la transposición y despejamos la y

$$- 2y + 9 = - 3$$
$$- 2y = - 3 - 9$$
$$- 2y = -12$$

multiplicamos por (-1) a los dos miembros de la ecuación para obtener la incógnita y **en positivo.**

$$(-1)(- 2y =- 12) \Rightarrow 2y = 12$$
$$y = 12/2 = 6$$

Conocemos los valores de $z = 1$ **y el de** $y = 6$ **nos falta hallar en valor de** x **para ello cogemos una cualquiera de las ecuaciones del principio y sustituimos los valores de** z **e** y **quedando reducido el sistema a una simple ecuación lineal con una incógnita.**

Cogemos la tercera ecuación, por ser la más sencilla, y sustituimos en ella las incógnitas z **e** y **por sus valores.**

$$x + y - z = 1 \Rightarrow x = - y + z + 1 \Rightarrow x = - 6 + 1 + 1 \Rightarrow x = - 4$$

Y ya tenemos los valores de las tres incógnitas del sistema:

$$\boldsymbol{x = - 4\ ;\ y = 6\ \text{y}\ z = 1}$$

2

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \end{cases}$$

Solución

Despejamos x **en la primera ecuación**

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x = - y - z$$

Sustituimos el valor de x **en las otras 2 ecuaciones restantes**

$$x + y - z = 2 \quad \Rightarrow \quad (- y - z) + y - z = 2 \quad \Rightarrow - y - z + y - z = 2$$
$$2x - y + 3z = - 1 \quad \Rightarrow \quad 2(- y - z) - y + 3z = - 1 \quad \Rightarrow -2y - 2z - y + 3z = - 1$$

Reducimos términos semejantes y realizamos la transposición de los términos independientes (números) al segundo miembro

$- 2z = 2$

$- 3y + z = - 1$

Obtenemos un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que resolvemos por sustitución

Multiplicamos por $(- 1)$ **a los dos miembros de la primera ecuación para obtener una incógnita positiva**

$(- 1)(-2z = 2) \Rightarrow 2z = - 2$

Despejamos z y hallamos su valor

$2z = - 2 \Rightarrow z = - 2/2 = - 1.$

Ya tenemos el valor de la primera incógnita: $z = -1$

Sustituimos el valor de Z **en las dos ecuaciones restantes del principio (la primera y segunda) con lo que el sistema queda reducido a un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (2x2)**

$x + y - z = 2 \quad \Rightarrow x + y - (-1) = 2 \quad \Rightarrow x + y + 1 = 2 \Rightarrow x + y = 1$

$2x - y + 3z = -1 \Rightarrow 2x - y + 3(-1) = -1 \Rightarrow 2x - y - 3 = -1 \Rightarrow 2x - y = 2$

Resolvemos por reducción (sumando miembro a miembro) el sistema obtenido

$$\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \\ \hline x + 2x + y - y = 1 + 2 \\ 3x = 3 \\ x = 3/3 = 1 \end{array}$$

Conocemos los valores de $z = -1$ **y de** $x = 1$

Para hallar el valor de ecuación restante y **sustituimos sus valores en una cualquiera de las ecuaciones iniciales, por ejemplo en la primera**

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y = - x - z = 0 \\ y = -1 - (-1) = - 1 + 1 = 0 \end{array}$$

Ya tenemos la solución del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (3x3)

$$\boldsymbol{x = 1; \quad z = - 1; \quad y = 0}$$

3.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas (3x3)

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 8 \end{cases}$$

Solución

Aplicamos el método de sustitución para ello debo elegir una ecuación y una variable para despejar. Elijo la tercera ecuación, que es la que tiene el coeficiente más pequeño en la variable X x+y-z=8 $\Longrightarrow x = 8 - y + z$

Sustituyo el valor de x en las otras 2 ecuaciones.

Al sustituir el valor de x en la primera ecuación se obtiene

2x-y+z=-2

2(8-y+z)-y+z=-2

16-2y+2z-y+z=-2

-3y+3z=-18

y-z=6

Al sustituir el valor de x en la segunda ecuación se obtiene

x+3y+z= 0

(8-y+z)+3y+z=0

8-y+z+3y+z=0

2y+2z=-8

y+z=-4

De lo que resulta un nuevo sistema de ecuaciones de 2x2

$$\begin{cases} y - z = 6 \\ y + z = -4 \end{cases}$$

Aquí tenemos que aplicar nuevamente el método de sustitución, es decir, elegir una ecuación y una variable para despejar. La más sencilla en este caso es la primera con la variable y**.**

y-z=6 $\Longrightarrow \ y = z + 6$

Sustituyo el valor de *y* **en la otra ecuación**

y+z=-4

(z+6)+z=-4

2z=-10

z=-5

Como ya tenemos que *z=5*

utilizo el último despeje que usé para hallar el valor de *y*

y=z+6 $\Longrightarrow \ y = -5 + 6 \Longrightarrow \ y = 1$

Ahora tomo el primer despeje que usé, el de la variable que me falta, en este caso X

x=8-y+z $\Longrightarrow \ x = 8 - 1 - 5 \Longrightarrow x = 2$

Con lo cual ya tenemos resuelto el sistema, cuya solución es:

x = 2 ;   y = 1 ;   z = 5

4 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones 3 x 3

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Solución

Resolvemos por el método de sustitución, elegimos la ecuación más sencilla y la variable para despejarla. Elegimos la tercera ecuación, que es la que tiene el coeficiente más pequeño en la variable X

x+y+z=4 $\Longrightarrow x = 4 - y - z$

Sustituyo el valor de x en las otras 2 ecuaciones.

Al sustituir x por su valor en la primera ecuación resulta

$$2x-5y+2z=1$$
$$2(4-y-z)-5y+2z=1$$
$$8-2y-2z-5y+2z=1$$
$$-7y=-7$$
$$y=1$$

Al sustituir x por su valor en la segunda ecuación se obtiene

$$3x+y+z=2$$
$$3(4-y-z)+y+z=2$$
$$12-3y-3z+y+z=2$$
$$-2y-2z=-10$$
$$y+z=5$$
$$z=-y+5 \implies z=-1+5 \implies z=4$$

Como ya tenemos que $y=1$, utilizo el último despeje que usé para encontrar z

Ahora tomo el primer despeje que usé, el de la variable que me falta, en este caso x

$$x=4-y-z \implies x=4-1-4 \implies x=-1$$

Y ya tenemos resuelto es sistema cuyos valores de sus variables son:

$$x=-1 \;;\quad y=1; \quad z=4$$

5 Resuelve por el método de sustitución

$$\begin{cases} 5x-3y-z=1 \\ x+4y-6z=-1 \\ 2x+3y+4z=9 \end{cases}$$

Solución

Para aplicar el método de sustitución, debo elegir la ecuación más sencilla y una variable para despejar.

Elijo la segunda ecuación, que es la que tiene el coeficiente más pequeño en la variable x

$$x+4y-6z=-1 \implies x=-1+6z-4y$$

Utilizo este despeje para sustituir en las otras 2 ecuaciones

$$5x-3y-z=1$$
$$5(-1+6z-4y)-3y-z=1$$
$$-5+30z-20y-3y-z=1$$
$$-23y+29z=6$$

Sustituimos en la siguiente ecuación

$$2x+3y+4z=9$$
$$2(-1+6z-4y)+3y+4z=9$$
$$-2+12z-8y+3y+4z=9$$
$$-5y+16z=11$$

De lo que resulta un nuevo sistema de ecuaciones de 2x2

$$\begin{cases} -23y+29z=6 \\ -5y+16z=11 \end{cases}$$

Aquí tenemos que aplicar nuevamente el método de sustitución, es decir, elegir una ecuación y una variable para despejar. La más sencilla en este caso es la segunda con la variable y.

$$-5y+16z=11 \implies 16z-11=5y \implies y=(16z-11)/5$$

Con este despeje sustituyo en la otra ecuación. Para deshacernos del denominador, será necesario multiplicar toda la ecuación por 5

-23[(16z-11)/5]+29z=6

-23(16z-11)+145z=30

-368z+253+145z=30

-223z=-223

z=1

Como ya tenemos que z=1**, utilizo el último despeje que usé para hallar el valor de** y

y=(16z-11)/5 $\Longrightarrow\ y=(16\cdot 1-11)/5 \Longrightarrow\ y=(16-11)/5 \Longrightarrow\ y=1$

Ahora tomo el primer despeje que usé, el de la variable que me falta, en este caso X

x=-1+6z-4y $\Longrightarrow\ x=-1+6\cdot 1-4\cdot 1 \Longrightarrow\ x=-1+6-4 \Longrightarrow\ x=1$

6 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones 3 x 3

$$\begin{cases} 2x-y+2z=6 \\ 3x+2y-z=4 \\ 4x+3y-3z=1 \end{cases}$$

Solución

Elegimos la primera ecuación y la variable y **para despejar.**

2x-y+2z=6 $\Longrightarrow\ y=2x+2z-6$

Utilizo este despeje para sustituir en las otras 2 ecuaciones

3x+2y-z=4

3x+2(2x+2z-6)-z=4

3x+4x+4z-12-z=4

7x+3z=16

4x+3y-3z=1

4x+3(2x+2z-6)-3z=1

4x+6x+6z-18-3z=1

10x+3z=19

De lo que resulta un nuevo sistema de ecuaciones de 2x2

$$\begin{cases} 7x+3z=16 \\ 10x+3z=19 \end{cases}$$

Aquí tenemos que aplicar nuevamente el método de sustitución, es decir, elegir una ecuación y una variable para despejar. La más sencilla en este caso es la primera con la variable Z.

7x+3z=16 z=(16-7x)/3

Con este despeje sustituyo en la otra ecuación

10x+3z=19

10x+3[(16-7x)/3]=19

10x+(16-7x)=19

10x+16-7x=19

10x-7x=19-16

3x=3

x=1

Como ya tenemos que X=1**, utilizo el último despeje que usé para encontrar** Z

z=(16-7x)/3 $\Longrightarrow\ z=(16-7\cdot 1)/3 \Longrightarrow\ z=9/3 \Longrightarrow\ z=3$

Ahora tomo el primer despeje que usé, el de la variable que me falta, en este caso Y

y=2x+2z-6 $\Longrightarrow\ y=2\cdot 1+2\cdot 3-6 \Longrightarrow\ y=2$

Y ya tenemos resulto el sistema, cuyos valores de sus incógnitas son:

$$x = 1 ;\quad y = 2;\ \ z = 3$$

Problemas

7 Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156€ por $24\ \mathrm{l}$ de leche, $6\ \mathrm{kg}$ de jamón serrano y $12\ \mathrm{l}$ de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que $1\ \mathrm{l}$ de aceite cuesta el triple que $1\ \mathrm{l}$ de leche y que $1\ \mathrm{kg}$ de jamón cuesta igual que $4\ \mathrm{l}$ de aceite más $4\ \mathrm{l}$ de leche.

Solución

Definimos las variables

Leche: x **; Jamón:** y**; Aceite:** z

Con los datos del problema se forma el siguiente sistema de ecuaciones lineales (3x3)

$$\begin{cases} 24x+6y+12z=156 \\ z=3x \\ y=4z+4x \end{cases}$$

En este caso, dos de nuestras ecuaciones tienen variables ya despejadas (Ecuación 2 y 3).

Sustituimos el valor de z **de la segunda ecuación en la tercera.**

$$\mathrm{y=4z+4x} \implies y=4\cdot 3x+4x \implies y=16x$$

Sustituimos el valor de y **y de** z **en la primera ecuación**

$$\mathrm{24x+6y+12z=156}$$
$$\mathrm{24x+6\cdot 16}x+12\cdot 3x=156$$
$$\mathrm{24x+96x+36x=156}$$
$$\mathrm{156x=156}$$
$$\mathrm{x=1}$$

Utilizo las ecuaciones despejadas de y **y de** z **para obtener su valor**

$$\mathrm{z=3x} \implies z=3\cdot 1 \implies z=3$$
$$\mathrm{y=16x} \implies y=16\cdot 1 \implies y=16$$

Finalmente

$$\mathrm{x=1} \implies y=16 \implies x=3$$

Esto quiere decir que los precios son
Leche 1 €
Jamón 16 €
Aceite 3 €

8. Pedro compra 2 libretas, un estuche y una carpeta por 55€. Si una libreta y el estuche juntos cuestan 5€ más que la carpeta, y se sabe que una libreta cuesta la mitad del valor de una carpeta. Encuentra el precio de cada artículo.

Solución

Definimos las variables
Libreta: X
Estuche: y
Carpeta: z

Con los datos del problema se forma el siguiente sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas (3x3)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 55 \\ x + y - z = 5 \\ x = \dfrac{z}{2} \end{cases}$$

En este caso, una de nuestras ecuaciones tiene variable ya despejada (Ecuación 3).

Sustituimos el valor de X de la tercera ecuación en la segunda.

x+y-z=5 $\Longrightarrow \dfrac{z}{2} + y - z = 5 \Longrightarrow 2y - z = 10 \Longrightarrow z = 2y - 10$

Sustituimos el valor de X y de Z en la primera ecuación

2x+y+z=55
z+y+z-10 =55
2z+y =55
2(2y-10)+y =55
4y-20+y =55
5y =75
y =15

Utilizo las ecuaciones despejadas de X y de Z para obtener su valor

z=2y-10 $\Longrightarrow z = 2 \cdot 15 - 10 \Longrightarrow z = 20$

x=$\dfrac{z}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{20}{2} \Longrightarrow x = 10$

Finalmente
Esto quiere decir que los precios son
Libreta 10 €
Estuche 15 €
Carpeta 20 €

9 Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: Infantiles, Oeste Americano y Terror. Se sabe que:

El 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas.

El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más del 60% de las de terror al representan la mitad del total de las películas.

Si hay 100 películas más del oeste que de infantiles. Halla el número de películas de cada tipo.

Solución

Definimos las variables.
Infantiles: X
Oeste Americano: y
Terror: Z

Con los datos del problema obtenemos un sistema de ecuaciones lineales de 3x3

$$\begin{cases} \frac{60}{100}x + \frac{50}{100}y = \frac{30}{100}(x+y+z) \\ \frac{20}{100}x + \frac{60}{100}y + \frac{60}{100}z = \frac{1}{2}(x+y+z) \\ y = x + 100 \end{cases}$$

Simplificamos la primer ecuación

$$\frac{60x}{100} + \frac{50y}{100} - \frac{30x}{100} - \frac{30y}{100} - \frac{30z}{100} = 0$$

Multiplicamos toda la ecuación por 100 para deshacernos del único denominador y simplificamos la expresión obtenida:

$$60x + 50y - 30x - 30y - 30z = 0$$
$$60x - 30x + 50y - 30y - 30z = 0$$
$$30x + 20y - 30z = 0$$

Dividimos por 10 **y obtenemos:**
$$3x + 2y - 3z = 0$$

Tomamos la segunda ecuación y seguimos los mismos pasos:
$$\frac{20x}{100} + \frac{60y}{100} + \frac{60z}{100} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

Para tener el mismo denominador común, multiplicamos las fracciones del lado derecho por $\frac{50}{50}$ **y obtenemos:**
$$\frac{20x}{100} + \frac{60y}{100} + \frac{60z}{100} = \frac{50x}{100} + \frac{50y}{100} + \frac{50z}{100}$$

Eliminamos los denominadores y simplificamos:
$$20x + 60y + 60z - 50x - 50y - 50z = 0$$
$$-30x + 10y + 10z = 0$$

Dividimos la ecuación por 10 **y obtenemos:**
$$-3x + y + z = 0$$

Usando las versiones simplificadas de la primera y la segunda ecuación, formamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ y = x + 100 \end{cases}$$

Como ya tenemos una variable despejada en una de las ecuaciones, la usamos para sustituir el valor de y **en las dos ecuaciones iniciales y multiplicamos la última obtenida por 3.**
$$3x + 2y - 3z = 0$$
$$3x + 2(x+100) - 3z = 0$$
$$3x + 2x + 200 - 3z = 0$$
$$5x - 3z = -200$$

$$-3x + y + z = 0$$
$$-3x + (x+100) + z = 0$$
$$-3x + x + 100 + z = 0$$
$$-2x + z = -100$$

De lo que resulta un nuevo sistema de ecuaciones de 2x2

$$\begin{cases} 5x - 3z = -200 \\ -2x + z = -100 \end{cases}$$

Aquí tenemos que aplicar nuevamente el método de sustitución, es decir, elegir una ecuación y una variable para despejar. La más sencilla en este caso es la segunda con la variable z**.**

$\mathrm{-2x+z=-100} \implies z = 2x - 100$

Con el valor de Z **sustituyo en la otra ecuación**

$\mathrm{5x-3z=-200}$
$\mathrm{5x-3(2x-100)=-200}$
$\mathrm{5x-6x+300=-200}$
$\mathrm{200+300=-5x+6x}$
$\mathrm{500=x}$

Como ya tenemos que $\mathrm{x=500}$**, utilizo el último despeje que usé para encontrar** z

$\mathrm{z=2x-100} \implies z = 2 \cdot 500 - 100 \implies z = 1000 - 100 \implies z = 900$

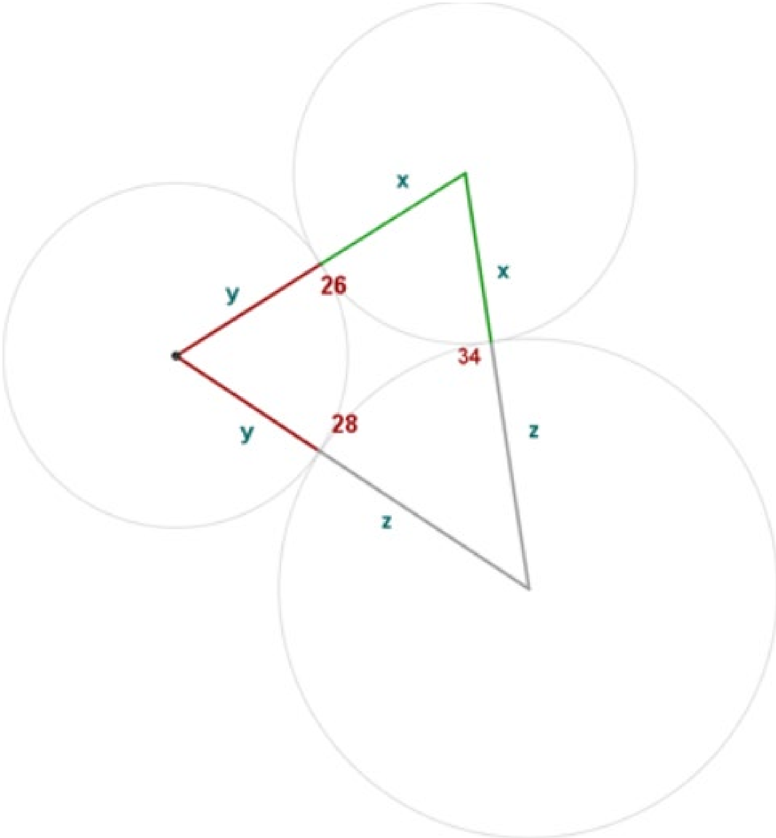
Ahora tomo el primer despeje que hice, el de la variable que me falta, en este caso y

$\mathrm{y=x+100} \implies y = 500 + 100 \implies y = 600$

Y ya tenemos resuelto el problema
Infantiles 500 películas
Oeste 600 películas
Terror 900 películas

10.-Los lados de un triángulo miden $26, 28$ **y** 34 cm**. Con centro en cada vértice se dibujan tres de conferencias, tangente entre sí dos a dos. Calcular las longitudes de los radios de las circunferencias**.
Solución

Representamos gráficamente los datos del problema



Determinamos una variable para cada radio de las 3 circunferencias y obtenemos el siguiente sistema 3x3

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ x + z = 34 \\ y + z = 28 \end{cases}$$

Para aplicar el método de sustitución, debo elegir una ecuación y una variable para despejar. Despejaré en este caso la variable X **de la primera ecuación**

$$\mathrm{x+y=26} \implies x = 26 - y$$

Utilizo este despeje para sustituir en las otras 2 ecuaciones

$$\mathrm{x+z=34}$$
$$\mathrm{(26\text{-}y)+z=34}$$
$$\mathrm{-y+z=34-26}$$
$$\mathrm{-y+z=8}$$

$$\mathrm{y+z=28}$$

En este caso la ecuación no tiene variable x, entonces la dejamos tal cual.
De esto tengo un nuevo sistema de ecuaciones de 2x2

$$\begin{cases} -y + z = 8 \\ y + z = 28 \end{cases}$$

Aquí tenemos que aplicar nuevamente el método de sustitución, es decir, elegir una ecuación y una variable para despejar, por ejemplo la segunda con la variable Z.

$$\mathrm{y+z=28} \implies z = 28 - y$$

Con este valor de Z sustituyo en la otra ecuación

$$-y+z=8$$
$$-y+(28-y)=8$$
$$-y+28-y=8$$
$$28-8=2y$$
$$20=2y$$
$$10=y$$

Como ya tenemos que $y=10$**, utilizo el último despeje que usé para encontrar** z

$$z=28-y \implies z = 28 - 10 \implies z = 18$$

Ahora tomo el primer despeje que hice, el de la variable que me falta, en este caso x

$$x=26-y \implies x = 26 - 10 \implies x = 16$$

Y ya tenemos resuelto el problema:

$$x = 16; \quad y = 10; \quad z = 18$$