

REGLA DE RUFFINI

Para dividir un polinomio entre un binomio de la forma $(x - a)$ podemos aplicar una forma rápida y sencilla de hallar el cociente, esta forma se conoce como la regla de Ruffini.

Ej: $P(x) : Q(x)$
 $P(x) = 2x^3 - x + 5 + x^4$
 $Q(x) = x - 1$

PROCESO

1.- Ordenamos de forma decreciente, si no lo está, el dividendo $P(x)$

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - x + 5$$

2.- Colocamos los coeficientes de todos los términos, si falta alguno se pone 0. A la izquierda escribimos el número que se resta a x , o sea el término independiente del divisor $Q(x)$, en este caso el 1 y bajamos el primer coeficiente a la izquierda, es decir el coeficiente de mayor grado.

| | | | | | |
|---|----------------|----------------|----------------|--------------|-----------------------|
| | coef. de x^4 | coef. de x^3 | coef. de x^2 | coef. de x | término independiente |
| 1 | 1 | 2 | 0 | -1 | 5 |
| | | | | | |
| 1 | | | | | |
| | | | | | |
| | 1 | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

coef. de x^4

3.- Multiplicamos el coeficiente bajado por el número de la izquierda y colocamos el resultado debajo del coeficiente del término siguiente y sumamos.

| | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|
| | 1 | 2 | 0 | -1 | 5 |
| 1 | 1 | | | | |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 3 | | | |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 3 | 3 | | |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 7 |

2+1=3

4.- Repetimos el proceso con las cantidades que vamos obteniendo, hasta llegar al último término.

| | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|
| | 1 | 2 | 0 | -1 | 5 |
| 1 | 1 | | | | |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 3 | | | |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 3 | 3 | | |
| | | | | | |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 7 |

5.- El último número obtenido, el 7, se corresponde con el resto de la división y los números anteriores, 1 3 3 3, son los coeficientes del cociente.

Por tanto, Cociente $C(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ y el resto $R(x) = 7$

Observaciones:

- Si el dividendo fuera un binomio de la forma $x + 1$, pondríamos a la izquierda -1, puesto que el número que estaríamos restando a x , que escrito en forma de resta queda: $x + 1 = x - (-1)$
- Como se divide entre un polinomio de grado 1, se tiene que:
 - El cociente será siempre un grado menor que el dividendo
 - El resto será de grado cero, ya que tiene que ser de grado menor que el divisor.

Ej.: Calcula $P(x) : Q(x)$

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ y $Q(x) = x + 2$

| | | | | |
|----|----|---|----|----|
| | 1 | 2 | -1 | -2 |
| -2 | -2 | 0 | 2 | |
| | | | | |
| -2 | 1 | 0 | -1 | 0 |

Cociente $C(x) = x^2 + 0x - 1 = x^2 - 1$ $R(x) = 0$

b) $P(x) = 4x^3 + 2x + 6$ y $Q(x) = x + 4$

| | | | | |
|----|-----|-----|------|------|
| | 4 | 0 | 2 | 6 |
| -4 | -16 | 64 | -264 | |
| | | | | |
| -4 | 4 | -16 | 66 | -258 |

Cociente $C(x) = 4x^2 - 16x + 66$ Resto $R(x) = -258$

c) $P(x) = x^5 - 32$ y $Q(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$$

Cociente $P(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x$ Resto $R(x) = 16$

TEOREMA DEL RESTO

Si dividimos un polinomio $P(x)$, entre un polinomio de la forma $(x - a)$ el resto de la división se puede obtener calculando el valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = -a$, es decir **a** cambiado de signo.

El resto de la división de un polinomio $P(x)$, entre un polinomio de la forma $(x - a)$ es el valor numérico de dicho polinomio para el valor $x = a$.

$P(-a) =$ resto de la división.

El valor del resto al dividir un polinomio entre $(x - a)$ coincide con el valor numérico de dicho polinomio cuando x toma el valor de a

Con este teorema podemos calcular el resto de una división sin tener que hacerla, siempre que dividamos un polinomio entre un binomio de la forma $(x + a)$

Ej.: Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$ y $Q(x) = x - 2$, calcular $P(x) : Q(x)$ aplicando el teorema del resto.

Hallamos el valor de a , como $Q(x) = x - a \Rightarrow a = -2$

Ahora calculamos el valor numérico de $P(x)$ para $x = 2$ (opuesto de a), esto es:

$$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 2 \cdot 4 + 6 - 2 = 12$$

De este modo, utilizando el teorema del resto podemos decir que el resto de $P(x) : Q(x)$ es igual a 12, por tanto $R(x) = 12$

Observación: Sabemos que cuando el resto de la división de un polinomio entre un binomio $x - a$ es 0, el polinomio es divisible por dicho binomio. Podemos decir que si el valor de un polinomio en $x = 0$, entonces dicho polinomio será divisible por el binomio $x - a$

Ej.: Determina si el polinomio $P(x) = x^3 + 3x - 4$ es divisible por el binomio $Q(x) = x - 1$

Hallamos el valor numérico de $P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

Como el valor numérico es 0, entonces el resto = 0, por tanto el polinomio $P(x)$ es divisible entre el binomio $Q(x)$

RAIZ DE UN POLINOMIO

Raíz de un polinomio: Es el valor de x para el que valor numérico del polinomio sea 0

Los valores de x que anulan la ecuación (que hacen que su valor sea 0) son las soluciones o raíces.

ACTIVIDADES REGLA DE RUFFINI.- TEOREMA DEL RESTO.-RAÍZ DE UN POLINOMIO

1.- Efectúa dividiendo por Ruffini

a) $(x^3 - 7x^2 + 11x - 5) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 11 & -5 \\ 3 & & 3 & -12 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & -8 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 4x - 1$; resto: -8

b) $(2x^3 + 7x^2 - 9x + 2) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & -9 & 2 \\ 2 & & 4 & 22 & 26 \\ \hline & 2 & 11 & 13 & 28 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 11x + 13$; resto: 28

c) $(x^3 - 3x^2 - 4x + 6) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -4 & +6 \\ -2 & & -2 & 10 & -12 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & -6 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 5x$; resto: -6

d) $(2x^4 - 12x^2 - 5) : (x + 3)$

Completamos el polinomio dividendo: $2x^4 + 0x^3 - 12x^2 + 0x - 5$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -12 & 0 & -5 \\ -3 & & -6 & +18 & -18 & 54 \\ \hline & 2 & -6 & +6 & -18 & 49 \end{array}$$

Cociente: $2x^3 - 6x^2 + 6x - 18$; resto = 49

e) $(x^4 - 2 - 4x^3 + 3x) : (x - 3)$

Ordenamos y completamos el polinomio dividendo

$$x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 3x - 2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & & 3 & -3 & -9 & -18 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & -6 & -20 \end{array}$$

Cociente: $x^3 - x^2 - 3x - 6$; resto: -20

f) $(3x^4 - 3x + 4) : (x - 1)$

Completamos el polinomio dividendo

$$3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x + 4$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 0 & -3 & +4 \\ 1 & & 3 & 3 & 3 & 0 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 0 & +4 \end{array}$$

Cociente $3x^3 + 3x^2 + 3x$; resto: 4

2.- De los números 1, -1, 2, -2, 3 y -3, indica los que son raíces de cada uno de los polinomios siguientes:

(Serán raíces los números que al dividirlos por Ruffini den de resto 0, ya que el valor numérico coincide con el valor del resto)

a) $x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & +1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

resto = 0 \Rightarrow raíz = 1

La raíz de $x^2 - 2x + 1 = 1$

b) $x^2 - 3x + 2$

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & -3 & +2 \\ & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad \text{resto} = 0 \Rightarrow \text{raíz} = 1$$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -3 & +2 \\ & & +2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \text{resto} = 0 \Rightarrow \text{raíz} = 2$$

Las raíces de $x^2 - 3x + 2$ son 1 y 2

c) $x^2 - 4x + 4$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -4 & +4 \\ & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad \text{resto} = 0 \Rightarrow \text{raíz} = 2$$

La raíz de $x^2 - 4x + 4$ es 2

d) $x^2 + x - 2$

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & 1 & -2 \\ & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \text{resto} = 0 \Rightarrow \text{raíz} = 1$$

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 1 & -2 \\ & & -2 & +2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \text{resto} = 0 \Rightarrow \text{raíz} = -2$$

Las raíces de $x^2 + x - 2$ son 1 y -2

3.- Sin efectuar la división calcula el resto de:

$$(2x^5 + x^4 - 3x^3 + x - 7) : (x - 2)$$

Hallamos el valor numérico del polinomio sustituyendo x por a

$$P(a) = 2(2)^5 + 2^4 - 3(2)^3 + 2 - 7$$

$$P(a) = 2 \cdot 32 + 16 - 24 + 2 - 7$$

$$P(a) = 64 + 16 - 24 + 2 - 7$$

$$P(a) = 51$$

El resto de la división será 51, que coincide con el valor numérico del polinomio.

4.- En $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 5x - 7$, calcula $P(3)$ empleando la división por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & 1 & -1 & -5 & -7 \\ & & 3 & 12 & 33 & 84 \\ \hline & 1 & 4 & 11 & 28 & 77 \end{array}$$

El valor numérico $P(3)$ será 77 ya que es el valor del resto.

5.- El valor numérico de un polinomio para $x = 5$ es 27. ¿Por qué binomio dividirías a dicho polinomio para que el resto fuera 27?

Por el binomio $(x - 5)$

6.- Halla el resto de la siguiente división sin hacer la división:

$$(4x^3 + 3x^2 - 5x + 4) : (x - 3)$$

$$P(3) = 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 4$$

$$P(3) = 4 \cdot 27 + 3 \cdot 9 - 15 + 4$$

$$P(3) = 108 + 27 - 15 + 4$$

$$P(3) = 124 \text{ es el valor numérico} \Rightarrow \text{resto} = 124$$

Observación: Sabemos que cuando el resto de la división de un polinomio entre un binomio $x - a$ es 0, el polinomio es divisible por dicho binomio. Con este teorema, podemos decir que si el valor de un polinomio en $x = a$ es 0, entonces dicho polinomio será divisible por el binomio $x - a$.

Por ejemplo, para $P(x) = x^3 + 3x - 4$, se tiene que su valor numérico en el 1 es: $P(1) = 1 + 3 - 4 = 0$, entonces, como éste sería el resto de dividir $P(x)$ entre $x - 1$, podemos decir que el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - 1$.

FACTORIZACIÓN

RAÍCES DE UN POLINOMIO:

Se dice que un valor $x = a$ es **raíz de un polinomio** $P(x)$, cuando al sustituir dicho valor en el polinomio, el resultado es 0; es decir, cuando $P(a) = 0$.

Por ejemplo, en el apartado a) del ejemplo 33, $x = -2$ es una raíz del polinomio dado y en el apartado c), $x = 2$ es raíz del $P(x)$. Sin embargo, $x = -4$ no es una raíz del polinomio del apartado b).

Las raíces de un polinomio, también se llaman **ceros del polinomio**.

Observaciones:

↪ Si considerásemos el conjunto de los llamados números complejos \mathbb{C} , en el cual está contenido \mathbb{R} , podríamos asegurar que un polinomio de grado n tiene siempre n raíces, es decir, tantas raíces como indica su grado. Trabajando sólo con los números reales, esto no se cumple siempre, pero sí podemos afirmar que:

- El número de raíces reales es menor o igual que el grado del polinomio.
- Un polinomio de grado impar tiene siempre, al menos, una raíz real. (Esto se debe a que en \mathbb{C} , las raíces complejas no reales van por parejas)

↳ Un polinomio cuyo término independiente sea 0, es decir, no aparece término independiente, siempre admite como raíz $x = 0$. Como se trata de una expresión en la que todos los términos contienen el factor x , al sustituir ésta por 0, se anulan todos y el resultado es 0. Por ejemplo, para el polinomio $P(x) = 4x^6 + 2x^5 - 3x^3 + x$, se tiene que $P(0) = 4 \cdot 0^6 + 2 \cdot 0^5 - 3 \cdot 0^3 + 0 = 0$.

MÉTODOS PARA CALCULAR LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO:

El primer paso será igualar el polinomio a cero, y después resolver la ecuación que nos queda.

1. **Si es de Grado 1:** Bastará con despejar la incógnita, x .

Ejemplo 20.: Halla la raíz del polinomio $P(x) = 2x+3$

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \text{ (Raíz única)}$$

2. **Si es de Grado 2:** Resolveremos la ecuación de segundo grado resultante.

Recordamos que la fórmula para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y que cuando la ecuación es incompleta, puede resolverse sin utilizarla.