OPERACIONES ALGEBRAICAS CON POLINOMIOS

Recuerda: monomios semejantes son los que tienen la misma parte literal

Es recomendable ordenar los polinomios de forma decreciente y completar los términos faltantes con ceros (ej. $0x^n$) para evitar errores, especialmente en la división.

- **SUMA Y RESTA**: Se ordenan los polinomios y se suman o restan los coeficientes de los monomios semejantes del mismo grado.

$$(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$$

$$(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$$

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo de otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas.

$(2a +4b -c +3) + (5a – 3b – 2c + 6)$

$$\begin{array}{rrrr}
2a & +4b & -c & +3 \\
5a & -3b & -2c & +6 \\
\hline
7a & +b & -3c & +9
\end{array}$$

$(- 6a^4 + 4 a^2b^2c – 4ab^4) + (3a^4 - 10ab^4) + (4a^4 – 6a^2b^2c + 16ab^4) =$

$$\begin{array}{rrr}
-6a^4 & +4a^2b^2c & -4ab^4 \\
3a^4 & & -10ab^4 \\
4a^4 & -6a^2b^2c & +16ab^4 \\
\hline
a^4 & -2a^2b^2c & +2ab^4
\end{array}$$

Para restar, sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo, es decir se cambian los signos de cada uno de los términos del polinomio sustraendo (se obtiene multiplicando a cada término por -1) y luego se suman los polinomios.
Ej: Restar los polinomios

$Q(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x)$ x - 3) y $Q(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) − Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) − (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) − Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 − 2x^3 + 3x^2 − 4x$

$P(x) − Q(x) = 2x^3 − 2x^3 + 3x^2 + 5x− 4x - 3$

$P(x) − Q(x) = 3x^2 + x - 3$

También podemos restar polinomios escribiendo uno debajo del otro, colocando los términos del sustraendo cambiados de signo debajo del minuendo de forma que los monomios semejantes queden en columnas

$P(x) = (2x^3 + 5x - 3) − Q(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$$\begin{array}{rrrr}
P(x) = & 2x^3 & & +5x-3 \\
Q(x) = & -2x^3 & +3x^2 & -4x \\
\hline
P(x)-Q(x) = & & 3x^2 & +x-3
\end{array}$$

• **MULTIPLICACIÓN**: Se multiplica cada término del segundo polinomio por cada uno de los términos del primero (propiedad distributiva), después se suman los términos semejantes.
Es conveniente ordenar los polinomios en orden decreciente y colocar los términos resultantes del producto en la misma columna.
Ej .:

$$(3x^4+2x^3-7x^2+5x-16)\cdot(2x^2)=\quad \begin{array}{r} 3x^4+2x^3-7x^2+5x-16 \\ 2x^2 \\ \hline 6x^6+4x^5-14x^4+10x^3-32x^2 \end{array}$$

Ej._ $(3x^2-5x+1)\cdot(5x^2-3x) =$

$$\begin{array}{r} 3x^2-5x+1 \\ 5x^2-3x \\ \hline -9x^3+15x^2-3x \\ +15x^4-25x^3+5x^2 \\ \hline +15x^4-34x^3+20x^2-3x \end{array}$$

Ej.: Dados los polinomios p (x) = 4x – 1 y q(x) = 2x + 2, efectúa su producto

$$\begin{array}{r} 4x-1 \\ 2x+2 \\ \hline 8x-2 \\ 8x^2-2x \\ \hline 8x^2+6x-2 \end{array}$$

IDENTIDADES NOTABLES
Recuerda: **una identidad es una igualdad que se cumple siempre para cualquier valor que demos a sus indeterminadas o variables**.
Es interesante conocer alguna identidades notables para agilizar algunas operaciones como:

• **Cuadrado de la suma de un binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**
El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término
Ej.: $(x+3)^2 = x^2+6x+9$

• **Cuadrado de la diferencia de un binomio: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**
El cuadrado de una diferencia el igual al cuadrado del primer término, menos el doble del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término
Ej.: $(2x-5)^2=4x^2-20x+25$

• **Producto de una suma de un binomio por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$**
El producto de una suma de un binomio por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrado de sus términos
Ej.: $(x+7)(x-7) = x^2-49$

• **Cubo de la suma de un binomio: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$**
El cubo de la suma de un binomio es igual al cubo del primer término más el triple del cuadrado primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.
Ej.: $(x + 5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

- **Cubo de la diferencia de un binomio: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$**

El cubo de la diferencia de un binomio es igual al cubo del primer término, menos el triple del cuadrado del primer término por el segundo, mas el triple del primer término por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

Ej.: $(x-2)^3 = x^3-6x^2+12x-8$

- **DIVISIÓN**: Se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de las variables iguales de los términos semejantes.

Recuerda que para restar sumamos el opuesto

Ej:: $(16x^5 - 8x^4 + 5x^3 - 2x^2) \div 4x$

$16x^5 - 8x^4 + 5x^3 - 2x^2 \quad 4x$ | $4x$

$16x^4$ | $4x^2 - 2x^3 + 5/4x^2 - 2/4x$

$0 \quad -8x^4$

$-8x^4$

$0 \quad +5x^3$

$-5x^3$

$0 \quad -2x^2$

$+2x^2$

0

Otra forma

Escribimos en forma de fracción y dividimos cada término del polinomio por el monomio 4x.

Primero ordenamos el polinomio en forma decreciente

$$\frac{12x^3+8x^2+x+4}{4x}=\frac{12x^3}{4x}+\frac{8x^2}{4x}+\frac{x}{4x}+\frac{4}{4x}=3x^2+2x+\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=3x^2+2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{4}$$ (resultado ordenado)

Otro ejemplo

$(8x^4y^3 - 3x^3y^4 + 5x^2y^3) : (x^2y^3)$

$8x^4y^5 - 3x^3y^4 + 5x^2y^3$ | x^2y^3

$-8x^4y^5$ | $8x^2y^2 - 3xy + 5$

$0 \quad -3x^3y^4$

$3x^3y^4$

$0 \quad +5x^2y^3$

$-5x^2y^3$

0

División con coeficientes fraccionarios

Recuerda que para dividir dos fracciones multiplicamos la primera fracción (dividendo) por la inversa de la segunda (divisor) y restamos los exponentes de las indeterminadas (variables).

$$\frac{2}{7}x^3 : \frac{5}{4}x = \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 5}x^2 = \frac{8}{35}x^2$$

División de un polinomio por un binomio

$(x^2 + 5x + 8) : (x + 3)$

Dividimos los dos primeros términos del dividendo entre el primer término del divisor.

El cociente lo multiplicamos por cada término del divisor colocamos el producto debajo de sus semejantes en el dividendo y restamos los términos (**recuerda que para restar sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo**, es decir cambiamos de signo al sustraendo).

Restamos

$x^2 + 5x + 8 \quad \lfloor\, x + 3$

$- x^2 - 3x \qquad\quad x + 2$

$0 \ \ + 2x \ + 8$

$- \ 2x - 6$

$0 \ \ + 2$

Dividir un polinomio incompleto entre un binomio

Para dividir un polinomio incompleto lo primero es ordenarlo en orden decreciente y completar los grados de los términos que faltan sustituyéndolos con la expresión $0x^n$ (n es el grado del término que falta)

Ej.: Divide

$(x^4 - 9x^2 - 5) : (x - 2)$

Completamos los términos que faltan en el dividendo y efectuamos la división

$(x^4 + 0x^3 - 9x^2 + 0x - 5) : (x - 2)$

$x^4 + 0x^3 \ - 9x^2 \ - 0x \ - 5 \quad \lfloor\, x - 2$

$-x^4 \ +2x^3 \qquad\qquad\qquad x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

$0 \quad + 2x^3 \ - 9x^2$

$- \ 2x^3 + 4x^2$

$0 \ \ - \ 5x^2 \ - 0x$

$+ 5x^2 - 10\,x$

$0 \quad - 10x - 5$

$10x - 20$

$0 \ \ - 25$

.

División entre polinomios

Dividir el polinomio $3x^4 - 7x^3 - 6x + 7$ entre $3x^2 - x + 1$

Completamos el polinomio dividendo

$3x^4 - 7x^3 + 0x^2 - 6x + 7 \quad \lfloor\, 3x^2 - x \ + 1$

$-3x^4 + \ x^3 \ - x^2 \qquad\qquad x^2 - 2x - 1$

$- 6x^3 - x^2 \ \ - \ 6x$

$+6x^3 - 2x^2 + 2x$

$0 \quad - 3x^2 \ \ - 4x + 7$

$+ 3x^2 \ - \ x \ \ + 1$

$0 \quad - 5x \ + 8$

EJERCICIOS RESUELTOS OPERACIONES ALGEBRAICAS CON POLINOMIOS

SUMA DE POLINOMIOS

1.- Efectúa:

x + 2x = **3x**

8a + 9a = **17a**

-b - 5b = **- 6b**

-9m - 7m = **- 16m**

$$\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}xy = \frac{2+1}{6}xy = \frac{3}{6}xy = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = \frac{2}{2}a = a$$

$$\frac{3}{5}ab + \frac{1}{10}ab = \frac{6+1}{10}ab = \frac{7}{10}ab$$

$$-\frac{5}{6}a^2b - \frac{1}{8}a^2b = \frac{-20-3}{24}a^2b = -\frac{23}{24}a^2b$$

2.- Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) (2a + 4b – c + 3) + (5a – 3b – 2c + 6) =

$$\begin{array}{r} 2a + 4b - c + 3 \\ 5a - 3b - 2c + 6 \\ \hline \mathbf{7a + b - 3c + 9} \end{array}$$

b) $(3x^2 + 2ax^2 + 4a^2x) + (3ax^2 + 2x^2) + (-5ax^2 + 2a^2x)$

$$\begin{array}{l} 3x^2 + 2ax^2 + 4a^2x \\ 2x^2 + 3ax^2 \\ \quad\quad - 5ax^2 + 2a^2x \\ \hline \mathbf{5x^2 \quad\quad + 6a^2x} \end{array}$$

c) $(a^2 + 3ab + 4b^2) + (6a^2 - 7ab + b^2) + (2a^2 – ab + 2b^2) =$

$$\begin{array}{l} a^2 + 3ab + 4b^2 \\ 6a^2 - 7ab + b^2 \\ 2a^2 - ab + 2b^2 \\ \hline \mathbf{9a^2 - 5ab + 7b^2} \end{array}$$

d) $(-6a^4 + 4a^2b^2c – 4ab^4) + (3a^4 – 10ab^4) + (4a^4 – 6a^2b^2c + 16ab^4) =$

$$\begin{array}{l} -6a^4 + 4a^2b^2c - 4ab^4 \\ 3a^4 \quad\quad\quad - 10ab^4 \\ 4a^4 - 6a^2b^2c + 16ab^4 \\ \hline \mathbf{a^4 - 2a^2b^2c + 2ab^4} \end{array}$$

e) $\frac{1}{5}ax + \frac{3}{10}ax + ax = \frac{2+3+10}{10}ax = \frac{15}{10}ax = \frac{3}{2}ax$

$$-\frac{3}{4}a^2x - \frac{5}{6}a^2x - a^2x = \frac{-9-10-12}{12}a^2x = -\frac{31}{12}a^2x$$

$$-\frac{2}{3}x^3y - \frac{1}{6}x^3y - \frac{1}{9}x^3y - \frac{1}{12}x^3y = \frac{-24-6-4-3}{36}x^3y = -\frac{37}{36}x^3y$$

3.- Haz las operaciones que se indican:

(2x – 32y) – (6x + 7y – 4) + 6 = **2x – 3y – 6x – 7y + 4 + 6 = - 4x – 10y + 10**

(7a + 3b3 – 2ab) – (6b + 4ab – 8b) – 4a – 6b = **7a + 3b – 2ab – 6b – 4ab+ 8b – 4a – 6b = 3a – b – 6ab**

$5x + 4 – 3x^2 – (7x + 4x^2 – 2x^2) + 3x – 7 = 5x + 4 – 3x^2 – 7x – 4x^2 + 2x^2 + 3x – 7 =$ $\mathbf{-5x^2 + x - 3}$

4.- Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{4}x^2\right)+\left(-x^2-\frac{2}{3}xy+2y^2\right)+\left(\frac{2}{3}x^2-xy-\frac{5}{4}y^2\right)=$

$$\begin{array}{r}
\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}xy\quad-\frac{1}{4}x^2 \\
-x^2\quad-\quad\frac{2}{3}xy+2y^2 \\
\frac{2}{3}x^2-xy\quad-\frac{5}{4}y^2 \\
\hline
\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}xy+\frac{1}{2}y^2
\end{array}$$

b) $\left(-\frac{3}{4}x^3+5ax^2-\frac{5}{8}a^2x\right)+\left(x^3-\frac{37}{8}ax^2+\frac{1}{2}a^2x\right)+\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}a^2x\right)$

$$\begin{array}{r}
-\frac{3}{4}x^3+5ax^2-\frac{5}{8}a^2x \\
x^3-\frac{37}{8}ax^2+\frac{1}{2}a^2x \\
-\frac{1}{2}x^3\qquad\qquad+\frac{3}{4}a^2x \\
\hline
-\frac{1}{4}x^3+\frac{37}{8}ax^2+\frac{5}{8}a^2x
\end{array}$$

c) $\left(3a^2-\frac{2}{5}ab-\frac{1}{2}b^2\right)+\left(-\frac{3}{2}a+2ab^2-\frac{2}{3}b^2\right)+\left(-\frac{2}{3}a^2-ab+b^2\right)$

$$\begin{array}{ccccc}
3a^2 & & & -\frac{2}{5}ab & -\frac{1}{2}b^2 \\
 & -\frac{3}{2}a & +2ab^2 & & -\frac{2}{3}b^2 \\
-\frac{2}{3}a^2 & & & -ab & +b^2 \\
\hline
\frac{7}{3}a^2 & -\frac{3}{2}a & +2ab^2 & -\frac{7}{5}ab & -\frac{1}{6}b^2
\end{array}$$

RESTA DE POLINOMIOS

Recuerda que para restar sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo.

5) Efectúa

$$(5x^2-3x+7)-(-x^3+7x^2-2x+4)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 5x^2 & -3x & & +7 \\
x^3 & -7x^2 & & +2x & -4 \\
\hline
x^3 & -2x^2 & & -x & +3
\end{array}$$

6) Dados los polinomios

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$Q(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

$R(x) = 4x^5 - 2x^3 + 3x - 1$

$S(x) = 3x^2 + 2x - 5$

Efectúa

a) (Px + Qx) – (Rx + Sx)

$$\begin{array}{r} (Px + Qx) = 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \\ \hline 6x^3 - 8x^2 + 6x - 1 \end{array}$$	$$\begin{array}{r} (Rx + Sx) = 4x^5 - 2x^3 + 3x - 1 \\ 3x^2 + 2x - 5 \\ \hline 4x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 6 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} (Px + Qx) - (Rx + Sx) \\ 6x^3 - 8x^2 + 6x - 1 \\ -4x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 \\ \hline -4x^5 + 8x^3 - 11x^2 + x + 5 \end{array}$$	

b) (Px- Qx) + (Rx – Sx)

$$\begin{array}{r} (Px - Qx) = 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ -4x^3 + 5x^2 - 2x + 1 \\ \hline -2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \end{array}$$	$$\begin{array}{r} (Rx - Sx) = 4x^5 - 2x^3 + 3x - 1 \\ -3x^2 - 2x + 5 \\ \hline 4x^5 - 2x^3 - 3x^2 + x + 4 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} (Px - Qx) + (Rx - Sx) \\ -2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\ 4x^5 - 2x^3 - 3x^2 + x + 4 \\ \hline 4x^5 - 4x^3 - x^2 + 5 \end{array}$$	

c) Px – Qx – Rx + Sx

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ -4x^3 + 5x^2 - 2x + 1 \\ -4x^5 + 2x^3 - 3x + 1 \\ 3x^2 + 2x - 5 \\ \hline -4x^5 + 5x^2 + x - 3 \end{array}$$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

7) Efectúa las operaciones siguientes

a) $(-2x-3)(2-3x)$	b) $(4x^2-3)(3x^2+3)$	c) $(2x^2+4x)(4x-3)$
$-2x-3$ $2-3x$ $6x^2+9x$ $-4x-6$ $\mathbf{6x^2+5x-6}$	$4x^2-3$ $3x^2+3$ $+12x^2-9$ $12x^4-9x^2$ $\mathbf{12x^4-3x^2-9}$	$2x^2+4x$ $4x-3$ $-6x^2-12x$ $8x^3+16x^2$ $\mathbf{8x^3+10x^2-12x}$

8) Efectúa los siguientes operaciones algebraicas

a) $[a^5-2a^4+3a^3-(2a+1)](-6a^2b^3)$

$$a^5-2a^4+3a^2-2a-1$$
$$-6a^2b^3$$
$$-6a^7b^3+12a^6b^3-18a^5b^3+12a^3b^3+6^2b3$$

b) $[11x^4-10x^3y+9x^2y^2-(8xy^3+7y^4)](-9xy^2)$

$$11x^4-10x^3y+9x^2y^2-8xy^3-7y^4$$
$$-9xy^2$$
$$-99x^5y^2+90x^4y^3-81x^3y^4+72x^2y^5+63xy^6$$

c) $x^4-x^2y^2+y^4$

$$x^2+y^2$$
$$x^4y^2-x^2y^4+y^6$$
$$x^6-x^4y^2+x^2y^4$$
$$x^6+y^6$$

d) $(a^2x-ax^2+x^3-a^3)(x+a)$

$$x^3-ax^2+a^2x-a^3$$
$$x+a$$
$$ax^3-a^2x^2+a^3x-a^4$$
$$x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x$$
$$x^4-a^4$$

9) Efectúa

a) $(x^2+xy+y^2)(x-y)$

$$x^2+xy+y^2$$
$$x-y$$
$$x^2y-xy^2-y^3$$
$$x^3-x^2y+xy^2$$
$$x^3-y^3$$

b) $(x^2-xy+y^2+y+1)(x+y-1)$

$$x^2-xy+y+y^2+1$$
$$x+y-1$$
$$-x^2+xy-y-y^2-1$$
$$+y+y^2-xy^2+y^3+x^2y$$
$$x^3+xy+xy^2+x-x^2y$$
$$x^3-x^2+2xy-1+y^3+x$$

Ordenado en orden decreciente respecto de la variable x

$$x^3-x^2+x+2xy+y^3-1$$

c) $(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)(a + b + c)$

Ordenamos el polinomio en orden decreciente respecto de a

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad a^2 - ab - ca + b^2 - bc + c^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a + b + c \\
\hline
\qquad\qquad\quad a^2c - abc - c^2a + b^2c - bc^2 + c^3 \\
\quad a^2b - ab^2 \qquad - abc - c^2a - b^2c + bc^2 \qquad + b^3 \\
a^3 - a^2b + ab^2 - a^2c - abc + ac^2 \\
\hline
a^3 \qquad\qquad\qquad - 3abc \qquad\qquad\qquad + c^3 + b^3
\end{array}$$

Ordenando el resultado queda: $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$

10) Efectúa los siguientes productos

a) $(2a - 3b + 4c)\left(-\frac{3}{2}a\right)$

$$\begin{array}{r}
2a - 3b + 4c \\
-\frac{3}{2}a \\
\hline
-3a^2 + \frac{9}{2}ab - 6ac
\end{array}$$

b) $\left(\frac{2}{5}a^3b + \frac{4}{9}bc^2 - \frac{1}{4}ab\right)\left(\frac{3}{2}a^2bc\right)$

$$\begin{array}{r}
\frac{2}{5}a^3b - \frac{1}{4}ab + \frac{4}{9}bc^2 \\
\frac{3}{2}a^2bc \\
\hline
\frac{6}{10}a^5b^2c - \frac{3}{8}a^3b^2c + \frac{12}{18}a^2b^2c^3
\end{array}$$

Simplificando queda:

$$\frac{3}{5}a^4b^2c - \frac{3}{8}a^3b^2c + \frac{2}{3}a^2b^2c^3$$

c) $\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}\right)$

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4} \\
\frac{1}{2}a - \frac{1}{3} \\
\hline
-\frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{9}a - \frac{1}{12} \\
\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{8}a \qquad\quad \\
\hline
\frac{1}{4}a^3 \qquad + \frac{1}{72}a - \frac{1}{12}
\end{array}$$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)$

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \\
\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \\ \hline
\frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{6} \\
\frac{1}{4}x^3 - x^2 \quad + \frac{3}{4}x \quad \\ \hline
\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{3}{6}
\end{array}$$

simplificando queda $\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{2}{3}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) =$

$$\begin{array}{r}
\frac{2}{3}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2 \\
\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y \\ \hline
-\frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{3}{4}y^3 \\
-\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 \qquad \\ \hline
-\frac{2}{9}x^3 \qquad\qquad\qquad - \frac{3}{4}y^3
\end{array}$$

e) $\left(\frac{3}{2}x^2 - ax - \frac{2}{3}a^2\right)\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{3}a^2\right)$

$$\begin{array}{r}
\frac{3}{2}x^2 - ax - \frac{2}{3}a^2 \\
\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{3}a^2 \\ \hline
\frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{3}a^3x - \frac{2}{9}a^4 \\
-\frac{3}{4}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3}a^3x \qquad \\
\frac{9}{8}x^4 - \frac{3}{4}ax^3 - \frac{1}{2}a^2x^2 \qquad\qquad \\ \hline
\frac{9}{8}x^4 - \frac{3}{2}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 \qquad\qquad - \frac{2}{9}a^4
\end{array}$$

IDENTIDADES NOTABLES

Recuerda: **una identidad es una igualdad que se cumple siempre para cualquier valor que demos a sus indeterminadas o variables**.

Es interesante conocer alguna identidades notables para agilizar algunas operaciones como:

• **Cuadrado de la suma de un binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término

Ej.: $(x+3)^2 = x^2+6x+9$

• **Cuadrado de la diferencia de un binomio: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**

El cuadrado de una diferencia el igual al cuadrado del primer término, menos el doble del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término

Ej.: $(2x-5)^2=4x^2-20x+25$

• **Producto de una suma de un binomio por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$**

El producto de una suma de un binomio por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrado de sus términos

Ej.: $(x+7)(x-7) = x^2-49$

• **Cubo de la suma de un binomio: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$**

El cubo de la suma de un binomio es igual al cubo del primer término más el triple del cuadrado primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.

Ej.: $(x + 5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

• **Cubo de la diferencia de un binomio: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$**

El cubo de la diferencia de un binomio es igual al cubo del primer término, menos el triple del cuadrado del primer término por el segundo, mas el triple del primer término por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

Ej.: $(x-2)^3 = x^3-6x^2+12x-8$

1- Desarrolla las siguientes expresiones

a) $(7x - 3)^2$= $\mathbf{49x^2 - 42x + 9}$

b) $(x - y)^2$ = $\mathbf{x^2 - 2xy + y^2}$

c) $(2x + 1)^2$ = $\mathbf{4x^2 + 4x + 1}$

d) $(6a - b)(6a + b)$ = $\mathbf{36a^2 - b^2}$

2.- Indica si estas igualdades son verdaderas o falsas indicando lo correcto

a) $(2x - 3)^2 = 9 - 4x^2 + 12x$ **Falsa** **Lo correcto es: $\mathbf{4x^2 - 12x +}$** 9

b) $(5x - 3)(5x + 3) = 25x^2 - 9$ **Verdadera**

c)) $(a - b)\,2a = 2a^2 - 2ab$ **Verdadera**

3.- Efectúa aplicando las reglas de las identidades notables y comprueba el resultado

Efectúa las siguientes identidades notables

$$(x+3)^2 = x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2 = x^2+6x+9$$

$$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2+2x+\frac{1}{4}$$

$$(2-5x)^2 = 2^2-2\cdot 2\cdot 5x+(5x)^2 = 4-20x+25x^2$$

$$\left(3xy^2-\frac{2}{3}x\right)^2 = \left(3xy^2\right)^2-2\cdot 3xy^2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 9x^2y^4-4x^2y^2+\frac{4}{9}x^2$$

$$(6x-4)\cdot(6x+4) = (6x)^2-4^2 = 36x^2-16$$

$$\left(3x^2-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(3x^2+\frac{3}{2}\right) = (3x^2)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9x^4-\frac{9}{4}$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- Se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de las variables con la misma base.

Recuerda que para restar sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo

1.- Efectúa las divisiones siguientes

a) $(15y^4 - 5y^3x - 30y^3) : (-5y)$

$$\begin{array}{l|l} 15y^4 - 5y^3x - 30yx^2 & -5y \\ \hline -15y^4 & -3y^3 + y^2x + 6y^2 \\ 0 \quad -5y^3x & \\ \quad +5y^3x & \\ \quad 0 \quad -30yx^2 & \\ \quad\quad +30yx^2 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

b) $(4x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2x) : (-2x)$

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2x & -2x \\ \hline -4x^4 & -2x^3 + x^2 - 4x + 1 \\ 0 \quad -2x^3 & \\ \quad +2x^3 & \\ \quad 0 \quad +8x^2 & \\ \quad\quad -8x^2 & \\ \quad\quad 0 \quad -2x & \\ \quad\quad\quad +2x & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

c) $(9x^2y^2 - 21xy^3 - 3x^3y) : (-3xy) = -3xy + 7y^2 + x^2$

d) $(4x^8y^8 - 8x^5y^6 - 28x^3y^3) : (-4x^3y^3) = -x^5y^5 + 2x^2y^3 + 7$

e) $(27x^4y^5z^6 - 45x^5y^4z^5 + 54x^6y^7z^4) : (-9x^3y^3z^2) = -3xy^2z^4 + 5x^2yz^3 - 6x^3y^4z^2$

2.- $(24x^2 - 65xy + 21y^2) : (8x - 3y) =$

$$\begin{array}{l|l} 24x^2 - 65xy + 21y^2 & 8x - 3y \\ \hline -24x^2 + 9xy & 3x - 7y \\ \quad -56xy + 21y^2 & \\ \quad +56xy - 21y^2 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

3.- $(35a^2 + 32\,ab - 99b^2) : (7a - 9b)$

$$\begin{array}{l|l} 35a^2 + 32ab - 99b^2 & 7a - 9b \\ \hline -35a^2 + 45ab & 5a + 11b \\ \quad 77ab - 99b^2 & \\ \quad -77ab + 99b2 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

4.- $(16a^3 - 46a^2 + 39a - 9) : (8a - 3)$

$$\begin{array}{l|l} 16a^3 - 46a^2 + 39a - 9 & 8a - 3 \\ \hline -16a^3 + 6a^2 & 2a^2 - 5a + 3 \\ \quad -40a^2 + 39a & \\ \quad +40a^2 - 15a & \\ \quad\quad 24a - 9 & \\ \quad\quad -24a + 9 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

5.- $(-4a^3 - 7a^2 + 3a + 15) : (-4a + 5)$

$$
\begin{array}{l|l}
- 4a3 - 7a2 + 3a + 15 & - 4a + 5 \\
\underline{+4a3 - 5a2} & a2 + 3a + 3 \\
\quad - 12a2 + 3a & \\
\quad \underline{+ 12a2 - 15a} & \\
\qquad - 12a + 15 & \\
\qquad \underline{+ 12a - 15} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

6.- $(81x^4 - 216x^3 - 216x^2 - 96x + 16) : (-3x + 2)$

$$
\begin{array}{l|l}
81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16 & - 3x + 2 \\
\underline{- 81x^4 + 54x^3} & - 27x^3 + 54x^2 - 36x + 8 \\
\quad - 162x^3 + 216x^2 & \\
\quad \underline{+ 162x^3 - 108x^2} & \\
\qquad + 108x^2 - 96x & \\
\qquad \underline{- 108x^2 + 72x} & \\
\qquad\quad - 24x + 16 & \\
\qquad\quad \underline{+ 24x - 16} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

2.- Efectúa

$(x^{12} - a^{12}) : (x^3 + a^3)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{12} - a^{12} & x^3 + a^3 \\
\underline{- x^{12} - x^9a^3} & x^9 - x^6a^3 + x^3a^6 - a^9 \\
\quad - x^9a^3 - a^{12} & \\
\quad \underline{x^9a^3 + x^6a^6} & \\
\qquad x^6a^6 - a^{12} & \\
\qquad \underline{- x^6a^6 - x^3a^9} & \\
\qquad\quad - x^3a^9 - a^{12} & \\
\qquad\quad \underline{x^3a^9 + a^{12}} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

3.- Efectúa las siguientes divisiones

Recuerda que para dividir fracciones multiplicamos la primera fracción (dividendo) por la inversa de la segunda (divisor) y se restan los exponentes de las variables iguales

Ej: $-\frac{4}{5}x^6 : \frac{5}{4}x^6 = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5}x^{6-6} = -\frac{16}{25}\,x^0 = -\frac{16}{25} \cdot 1 = -\frac{16}{25}$ **(recuerda que toda potencia de exponente cero es igual a la unidad)**

a) $-\frac{3}{5}\boldsymbol{x^6}: \left(-\frac{5}{3}\boldsymbol{x^7}\right) = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5}\ \boldsymbol{x^{6-7}} = \frac{9}{25}\boldsymbol{x^{-1}}$

b) $\frac{18x^8}{-12x^5} : \frac{-4x^2}{3x^4} = \frac{18x^8 \cdot 3x^4}{-12x^5 \cdot (-4x^2)} = \frac{54x^{12}}{48x^7} = \frac{9}{8}\boldsymbol{x^5}$

c) $\left(-\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}x\right) : \left(-\frac{5}{6}x\right)$

$-\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}xy + \frac{10}{3}x \;\big|\; -\frac{5}{6}x$

$+\frac{5}{2}x^2 \qquad\qquad\qquad 3x - 2y - 4$

$0 \quad + \frac{5}{3}xy$

$-\frac{5}{3}xy$

$0 \quad + \frac{10}{3}x$

$-\frac{10}{3}x$

0

d) $(x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - x + 2) : (x^2 - 3x + 2)$

$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - x + 2 \;\big|\; x^2 - 3x + 2$

$-x^5 + 3x^4 - 2x^3 \qquad\qquad x^3 - 2x^2 + x + 1$

$-2x^4 + 7x^3 - 6x^2$

$+2x^4 - 6x^3 + 4x^2$

$x^3 - 2x^2 - x$

$-x^3 + 3x^2 - 2x$

$x^2 - 3x + 2$

$-x^2 + 3x - 2$

0

e) $(x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) : (x^2 - x - 2)$

$x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \;\big|\; x^2 - x - 2$

$-x^5 + x^4 + 2x^3 \qquad\qquad x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$-3x^4 + 5x^3 + 3x^2$

$+3x^4 - 3x^3 - 6x^2$

$2x^3 - 3x^2 - 3x$

$-2x^3 + 2x^2 + 4x$

$-x^2 + x + 2$

$+x^2 - x - 2$

0

f) $\left(-2a^5x^3 + \frac{7}{2}a^4x^4\right) : \left(\frac{7}{3}a^3\right)$

$-2a^5x^3 + \frac{7}{2}a^4x^4 \;\big|\; \frac{7}{3}a^3x$

$-2a^5x^3$

$0 \quad + \frac{7}{2}a^4x^4 \qquad -\frac{6}{7}a^2x^2 + \frac{3}{2}ax^3$

$-\frac{7}{2}a^4x^4$

0

g) $\left(\frac{1}{4}a^2x - \frac{1}{16}abx - \frac{3}{8}acx\right) : \frac{3}{8}ax$

$$\frac{1}{4}a^2x - \frac{1}{16}abx - \frac{3}{8}acx \;\Big|\; \frac{3}{8}ax$$

$$-\frac{1}{4}a^2x \qquad\qquad \frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b - c$$

$$0 \quad - \frac{1}{16}abx$$

$$\frac{1}{16}abx$$

$$0 \quad - \frac{3}{8}acx$$

$$\frac{3}{8}acx$$

$$0$$

h) $\left(\frac{6}{125}a^5 + \frac{3}{4}a^2c^3\right) : \left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ac\right)$

$$\frac{6}{125}a^5 \qquad\qquad + \frac{3}{4}a^2c^3 \;\Big|\; \frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ac$$

$$-\frac{6}{125}a^5 - \frac{3}{25}a^4c \qquad\qquad \frac{6}{25}a^3 - \frac{3}{5}a^2c + \frac{3}{2}ac^2$$

$$0 \quad \frac{3}{25}a^4c + \frac{3}{10}a^3c^2$$

$$0 \quad -\frac{3}{10}a^3c^2 + \frac{3}{4}a^2c^3$$

$$0 \quad -\frac{3}{4}a^2c^3$$

$$0$$

i) $\left(\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{16}a - \frac{1}{64}\right) : \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}\right)$

$$\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{16}a - \frac{1}{64} \;\Big|\; \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{36}a^2 \qquad\qquad \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{6}a + \frac{1}{16}$$

$$-\frac{1}{18}a^2 + \frac{1}{16}a$$

$$\frac{1}{18}a^2 - \frac{1}{24}a$$

$$\frac{1}{48}a - \frac{1}{64}$$

$$-\frac{1}{48}a + \frac{1}{64}$$

j) $(x^{12} - a^{12}) : (x^3 + a^3)$

$$
\begin{array}{lllll|l}
x^{12} & & & & -a^{12} & x^3 + a^3 \\
\cline{6-6}
\underline{-x^{12}} & \underline{-x^9a^3} & & & & x^9 - x^6a^3 + x^3a^6 - a^9 \\
 & -x^9a^3 & & & -a^{12} & \\
 & \underline{+x^9a^3} & \underline{+x^6a^6} & & & \\
 & & +x^6a^6 & & -a^{12} & \\
 & & \underline{-x^6a^6} & \underline{-x^3a^9} & & \\
 & & & -x^3a^9 & -a^{12} & \\
 & & & \underline{x^3a^9} & \underline{+a^{12}} & \\
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

4.- El divisor de una división es $x^3 + 1$. Calcula el dividendo sabiendo que el cociente es $x^2 - 2$ y el resto $x + 5$

D = d · c + r

D = $(x^3 + 1)(x^2 - 2) + (x + 5)$

divisor x cociente + resto = dividendo

$$
\begin{array}{r}
x^3 + 1 \\
\underline{x^2 - 2} \\
-2x^3 \qquad - 2 \\
\underline{x^5 \qquad + x^2} \\
\end{array}
$$

$(x^5 - 2x^3 + x^2 - 2) \quad + \quad (x + 5) \quad = \quad x^5 - 2x^3 + x^2 + x + 3$

5.-El dividendo de una división es $x^4 - 2x + 1$, el cociente es $x^3 - 2$ y el resto 1 ¿Cuál es el divisor?

Dividendo = divisor x cociente + resto

$$\boldsymbol{divisor = \frac{dividendo - resto}{cociente}}$$

$$\boldsymbol{divisor = \frac{(x^4 - 2x + 1) - 1}{x^3 - 2}} = \frac{x^4 - 2x}{x^3 - 2} = \boldsymbol{x}$$

Un caso particular es la división por Ruffini que veremos en otra página

https://math118.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/01/leccic3b3n-10-divisic3b3n-de-polinomios-21.pdf

https://iesaricel.org/javierpl/Archivos/Eso3/3ESO_Tema%2004_Polinomios%20Division%20y%20Factorizacion.pdf

22.- Realiza las divisiones siguientes

$(15x^3 - 3x^2 + 12x) : (-3x) = -5x^2 + x - 4$

$(-16x^7 + 8x^5 - 12x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x) : (-4x^2) = 4x^5 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - x^{-1}$

$$\left(\frac{1}{4}x^7y^4 - \frac{2}{3}x^6y^3 + 12x^5y^2 + \frac{3}{4}x^3y - \frac{4}{5}x^2y^5\right) : \left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right) =$$

$$-\frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{4}{3}x^3y - 24x^2 - \frac{3}{2}y^{-1} + \frac{8}{5}x^{-1}y^3$$

AMPLIACIÓN

23.- Calcula el valor numérico del término independiente c en cada uno de los siguientes polinomios para que su valor numérico sea 2, tomando x los valores indicados.

$6x^3 + 4x^2 - c$ para $x = 1$ $6 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - c = 2$ $6 + 4 - c = 2$ $10 - c = 2$ $c = 10 - 2 = 8$	$2x^5 - 6x^3 - 2x^2 - c$ para $x = 2$ $2 \cdot 2^5 - 6 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - c = 2$ $2 \cdot 32 - 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 - c = 2$ $64 - 48 - 8 - c = 2$ $8 - c = 2$ $c = 8 - 2 = 6$
$-7x^3 - 6x^2 + c$ para $x = -1$ $-7 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + c = 2$ $-7 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 + c = 2$ $7 - 6 + c = 2$ $1 + c = 2$ $c = 1$	

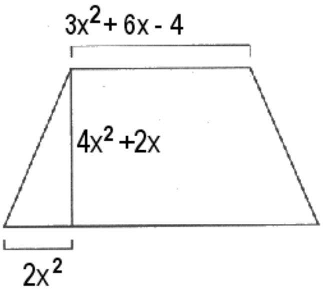
24.- Completa las siguientes expresiones

$2\boxed{?} + 4\boxed{?})^2$ → $25x^4 + 70x + 49 = (5x^2 + 7)^2$

$\boxed{?})\boxed{?}(\quad) = 36x^2 - 4a^2y^4$ → $(6x + 2ay^2)(6x - 2ay^2) = 36x^2 - 4a^2y^4$

$25a\boxed{?} + 9b^2x^2 = (5\boxed{?})^2$ → $25a^2y^4 - 30ay^2bx + 9b^2x^2 = (5ay^2 - 3bx)^2$

25.- Encuentra el polinomio que expresa el área de la siguiente figura



La figura es un trapecio cuya área es igual a:

menor · altura

a los datos del problema resulta:

$$\frac{(3x^2 + 6x - 4 + 2x^2 + 2x^2) + (3x^2 + 6x - 4)}{2} \cdot 4x^2 + 2x =$$

$$\frac{10x^2 + 12x - 8}{2} \cdot 4x^2 + 2x =$$

$$(5x^2 + 6x - 4)(4x^2 + 2x) =$$

26.- Desarrolla la expresión $(a + b)^3$ y define la regla que podría aplicarse en otros casos semejantes

La expresión $(a + b)^3$ se puede descomponer en: $(a + b)^2 \cdot (a + b)$
Hacemos primero $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Multiplicamos el resultado por (a +b) y resulta:

$$\begin{array}{r}
a^2 + 2ab + b^2 \\
a + b \\
\hline
a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}$$

A partir del resultado podemos definir la siguiente regla: "El cubo de la suma de un binomio es igual al cubo del primer término más el triple del cuadrado del primer término por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo más es cubo del segundo"

27.- Aplica la regla anterior para desarrollar el cubo de los siguientes binomios

$(5a + 3b)^3 = 125a^3 + 225a^2b + 135ab^2 + 27b^3$
$(3x + 2y)^3 = 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
$(2m + 5n)^3 = 8m^3 + 60m^2n + 150mn^2 + 125n^3$

28.- Desarrolla la expresión $(a – b)^3$ y aplícala para hallar el valor de $(2a – b)^3$

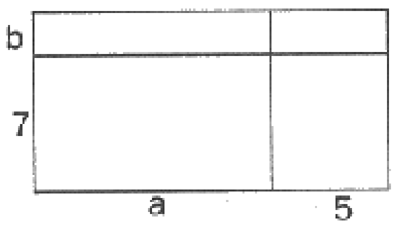
La expresión $(a - b)^3$ se puede descomponer en: $(a - b)^2 \cdot (a - b)$
Hacemos primero $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Multiplicamos el resultado por (a +b) y resulta:

$$\begin{array}{r}
a^2 - 2ab + b^2 \\
a - b \\
\hline
- a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
a^3 - 2a^2b + ab^2 \\
\hline
a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
\end{array}$$

A partir del resultado podemos definir la siguiente regla: "El cubo de la diferencia de un binomio es igual al cubo del primer término menos el triple del cuadrado del primer término por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo menos es cubo del segundo"

Por tanto el valor de $(2a – b)^3$ será: $8a^3 – 12a^2b + 6ab^2 – b^3$

29.- Halla el área del siguiente rectángulo



Área del rectángulo = base x altura
ea de la figura: (a + 5) (b + 7) = ab + 7a + 5