

FRACCIONES ALGEBRAICAS

FRACCIÓN ALGEBRAICA: Es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas.

Ej.: $\frac{2x+9}{x-3}$; $\frac{a^3+bc}{c^2+d}$ son fracciones algebraicas

$\frac{2x+9}{3}$; $\frac{a^3+bc}{5^2}$ no son fracciones algebraicas, sino numéricas.

VALOR NUMÉRICO DE UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA: Es el cociente de los valores numéricos del numerador y del denominador.

Ej.: $\frac{2x}{x-3}$ para $x = -2 \Rightarrow \frac{2(-2)}{(-2)-3} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$

FRACCIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES: Son las que tienen el mismo valor numérico para cualquier valor que demos a sus indeterminadas siempre que no anulen el denominador.

En las fracciones equivalentes se cumple que los productos cruzados son iguales.

Ej.: $\frac{a}{b+1} = \frac{ab-a}{b^2-1} \Rightarrow a(b^2-1) = (b+1)(ab-a)$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS: Si se multiplican o dividen a los dos términos de una fracción (numerador y denominador) por un mismo número o expresión algebraica, distinto de cero, se obtiene otra fracción equivalente a la primera.

Ej.: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS: Para simplificar fracciones algebraicas se dividen sus dos términos por los factores comunes a ambos.

Para simplificar se descompone el numerador y el denominador en factores y se eliminan los comunes a ambos.

Ej.: $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{x+2}$

VERDADERO VALOR DE UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA: Una fracción puede ser indeterminada para ciertos valores atribuido a sus letras, esto ocurre cuando el valor numérico de la fracción es $\frac{0}{0}$

Para evitar esa indeterminación podemos simplificar descomponiendo en factores.

El valor numérico de la fracción irreducible se llama, por convenio, verdadero valor de la fracción.

Ej.: Halla el verdadero valor de la fracción $\frac{x^2-6x+8}{x^3-5x^2+7x-2}$ para $x = 2$

Sustituyendo se obtiene $\frac{2^2-6 \cdot 2+8}{2^3-5 \cdot 2^2+7 \cdot 2-2} \Rightarrow \frac{4-12+8}{8-20+14-2} = \frac{0}{0}$ (indeterminación)

Si ambas expresiones se anulan para $x = 2$ serán divisibles entre $(x-2)$

Descomponemos factorialmente ambas expresiones dividiéndolas entre $(x-2)$

Aplicamos la división por Ruffini a ambos términos de la fracción

$(x^2-6x+8) : (x-2)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & +8 \\ 2 & & 2 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (x^2-6x+8) = (x-2)(x-4)$

$(x^3-5x^2+7x-2) : (x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & +7 & -2 \\ 2 & & 2 & -6 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (x^3-5x^2+7x-2) = (x-2)(x^2-3x+1)$

De donde resulta que:

$$\frac{x^2-6x+8}{x^3-5x^2+7x-2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x^2-3x+1)} = \frac{x-4}{x^2-3x+1}$$

Hallamos el valor numérico de la fracción irreducible para $x = 2$

$$\frac{x-4}{x^2-3x+1} = \frac{2-4}{2^2-3 \cdot 2+1} = \frac{-2}{4-6+1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Por lo tanto 2 será el verdadero valor de la fracción propuesta.

REDUCCIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS A MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR: Para reducir fracciones algebraicas a mínimo común denominador se simplifican, si no son irreducibles se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores, que será el denominador común, y se divide el m.c.m. por el denominador de cada fracción y se multiplica el cociente por el numerador respectivo.

El proceso es idéntico al que se sigue con las fracciones. *Escriba aquí la ecuación numéricas.*

Ej.: Reducir a mínimo común denominador las fracciones:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}; \frac{x}{x+1}; \frac{1}{x-1}$$

El m.c.m es x^2-1 ya que se descompone en $(x+1)(x-1)$ y será el denominador común.

Dividiendo x^2-1 entre cada denominador y multiplicando el resultado por el numerador respectivo resulta:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}; \frac{x(x-1)}{x^2-1}; \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}; \frac{x^2-x}{x^2-1}; \frac{x+1}{x^2-1}$$

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS: La suma de fracciones algebraicas del mismo denominador es otra fracción del mismo denominador y cuyo numerador es igual a la suma algebraica de los numeradores.

$$\text{Ej.: } \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+b+c}{m}$$

Si tienen distinto denominador se reducen a común denominador

Ej.:

$$\frac{a}{a+2} + \frac{a}{a-2} + \frac{a^2}{a^2-4} \quad \text{m.c.m.} = a^2-4$$

$$\frac{a(a-2)}{a^2-4} + \frac{a(a+2)}{a^2-4} + \frac{a^2}{a^2-4} = \frac{a^2-2a}{a^2-4} + \frac{a^2+2a}{a^2-4} + \frac{a^2}{a^2-4} = \frac{3a^2}{a^2-4}$$

Para restar fracciones algebraicas se suma a la primera la opuesta de la segunda

$$\frac{a}{a+2} - \frac{a}{a-2} \quad \text{m.c.m.} (a+2) \text{ y } (a-2) = a^2-4$$

$$\frac{a(a-2)}{a^2-4} - \frac{a(a+2)}{a^2-4} = \frac{a^2-2a}{a^2-4} - \frac{a^2+2a}{a^2-4} = \frac{a^2-2a-a^2-2a}{a^2-4} = \frac{-4a}{a^2-4}$$

PRODUCTO DE FRACCIONES ALGEBRAICAS: El producto de fracciones algebraicas es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores-

$$\text{Ej.: } \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z} = \frac{a \cdot b \cdot c}{x \cdot y \cdot z}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS: Para dividir fracciones se multiplica la fracción dividendo por la inversa del divisor

$$\text{Ej.: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- Comprueba si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes:

a) $\frac{x}{x-2} \text{ y } \frac{2x}{2x-4} \Rightarrow \frac{x}{x-2} \text{ y } \frac{2x}{2(x-2)} = \frac{x}{x-2} = \frac{x}{x-2}$ Sí, son equivalentes

b) $\frac{3x-2y}{4x-y} \text{ y } \frac{3x^2-2xy-3x+2y}{4x^2-xy-4x+y} \Rightarrow \frac{3x-2y}{4x-y} \text{ y } \frac{3x(x-1)-2y(x-1)}{4x(x-1)-y(x-1)} \Rightarrow$
 $\frac{3x-2y}{4x-y} \text{ y } \frac{(x-1)(3x-2y)}{(x-1)(4x-y)} \Rightarrow \frac{3x-2y}{4x-y} = \frac{3x-2y}{4x-y}$ Sí, son equivalentes

c) $\frac{2xy-x^2}{x-2y} \text{ y } \frac{x-x^2}{x-1} \Rightarrow \frac{x(2y-x)}{x-2y} \text{ y } \frac{x(1-x)}{x-1} \Rightarrow \frac{x(-x+2y)}{x-2y} \text{ y } \frac{x(-x+1)}{x-1} \Rightarrow$
 $(x-1) \text{ y } (x-1) \Rightarrow -x = -x$ Sí, son equivalentes

d) $\frac{3(x-2)^2}{4(x^2-4)} \text{ y } \frac{3(x-2)}{4(x+2)} \Rightarrow \frac{3(x-2)(x-2)}{4(x+2)(x-2)} \text{ y } \frac{3(x-2)}{4(x+2)} \Rightarrow \frac{3(x-2)}{4(x+2)} = \frac{3(x-2)}{4(x+2)}$
 Sí, son equivalentes

2.- Halla el verdadero valor de las siguientes fracciones para el valor de x que se indica en cada caso:

a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$ para $x = 2$

Descomponemos por Ruffini a ambos términos de la fracción dividiendo entre 2 y simplificamos dicha fracción.

$$\begin{array}{r|rrr} x^2 - 5x + 6 & 1 & -5 & +6 \\ & 2 & & \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$\begin{array}{r|rrr} x^2 - 6x + 8 & 1 & -6 & +8 \\ & 2 & & \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array} \quad x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-4)(x-2)} = \frac{x-3}{x-4}$$

Hallamos el valor numérico para $x = 2$ de la fracción simplificada

$$\frac{x-3}{x-4} \Rightarrow \frac{2-3}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \text{ es el verdadero valor}$$

b) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 5x + 6}$ para $x = -2$

$$\begin{array}{r|rrr} x^2 - x - 6 & 1 & -1 & -6 \\ & -2 & & \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 x^2 + 5x + 6 & & & \\
 & 1 & +5 & +6 \\
 -2 & & -2 & -6 \\
 \hline
 & 1 & +3 & 0
 \end{array}
 \quad x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

Hallamos el valor numérico para $x = -2$ de la fracción simplificada:

$$\frac{x - 3}{x + 3} \Rightarrow \frac{-2 - 3}{-2 + 3} = \frac{-5}{1} = -5 \text{ es el verdadero valor}$$

c) $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^3 - x^2 - x + 1 & & & & \\
 & 1 & -1 & -1 & +1 \\
 1 & & 1 & 0 & -1 \\
 \hline
 & 1 & 0 & -1 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = (x^2 - 1)(x - 1) = (x + 1)(x - 1)(x - 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & & & & \\
 & 1 & -3 & +3 & -1 \\
 1 & & +1 & -2 & +1 \\
 \hline
 & 1 & -2 & +1 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x^2 - 2x + 1)(x - 1)$$

$$(x^2 - 2x + 1)(x - 1) = (x - 1)^2(x - 1) = (x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 1)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Sustituyendo x por -1 queda: $\frac{1 + 1}{1 - 1} = \frac{2}{0}$ INDETERMINACIÓN

d) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ para $x = 3$

$$\begin{array}{r|rrr}
 x^2 - 4x + 3 & & & \\
 & 1 & -4 & +3 \\
 3 & & 3 & -3 \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 x^2 - 2x - 3 & & & \\
 & 1 & -2 & -3 \\
 & 3 & 3 & 3 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

Sustituyendo x por 3 queda: $\frac{x - 1}{x + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ verdadero valor.

3.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

$$a) \frac{3x+1}{9x^2-1} = \frac{3x+1}{(3x+1)(3x-1)} = \frac{1}{3x-1}$$

$$b) \frac{x^3y - xy^3}{x^2y - xy^2} = \frac{xy(x^2 - y^2)}{xy(x - y)} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x-y} = x + y$$

$$c) \frac{ax + by}{ax^2 + bxy} = \frac{ax + by}{x(ax + by)} = \frac{1}{x}$$

$$d) \frac{a^2 - 2a + 1}{a - 1} = \frac{(a-1)(a-1)}{a-1} = a - 1$$

$$e) \frac{x^4 - y^4}{x^3y - xy^3} = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$f) \frac{6x^2 - 3xy}{2xy^2 - 4x^2y} = \frac{3x(2x - y)}{2xy(y - 2x)} = \frac{3(2x - y)}{2y(y - 2x)} = \frac{3(2x - y)}{-2y(-y + 2x)} = \frac{3}{-2y}$$

$$g) \frac{ac + bc + ad + bd}{a^2 + ab} = \frac{c(a + b) + d(a + b)}{a(a + b)} = \frac{(a + b)(c + d)}{a(a + b)} = \frac{cd}{a}$$

$$h) \frac{ab - 2a - 3b + 6}{ab - 2a} = \frac{a(b - 2) - 3(b - 2)}{a(b - 2)} = \frac{(b - 2)(a - 3)}{a(b - 2)} = \frac{a - 3}{a}$$

$$i) \frac{4ab + (a - b)^2}{5a + 5b} = \frac{4ab + a^2 - 2ab + b^2}{5(a + b)} = \frac{2ab + a^2 + b^2}{5(a + b)} = \frac{(a + b)^2}{5(a + b)} = \frac{a + b}{5}$$

$$j) \frac{a^3b + 3a^2b + 9ab}{a^3 - 27} = \frac{ab(a^2 + 3a + 9)}{(a - 3)(a^2 + 3a + 9)} = \frac{ab}{a - 3}$$

$$k) \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(x - 2)}{x^2 - 5x + 6}$$

Buscamos un valor que anule a x en el numerador y dividimos por Ruffini al denominador entre dicho valor (en este caso x = 2)

$$\begin{array}{r|rrr} x^2 - 5x + 6 & 1 & -5 & +6 \\ & 2 & +2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$\frac{x(x - 2)}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(x - 2)}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{x}{x - 3}$$

$$l) \frac{8x^2 - 12xy}{6x^2 - 4xy} = \frac{4x(2x - 3y)}{2x(3x - 2y)} = \frac{2(2x - 3y)}{(3x - 2y)}$$

m) $\frac{3x - x^2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(3 - x)}{x^2 - 5x + 6}$ = Descomponemos en factores al denominador dividiendo por Ruffini entre $x - 3$ ya que 3 es el valor de x que anula al numerador

$$x^2 - 5x + 6 \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & +6 \\ 3 & & +3 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$\frac{3x - x^2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(3 - x)}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(3 - x)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x}{(x - 2)} \cdot (-1) = \frac{-x}{x - 2}$$

n) $\frac{3x^4 - 3x^2y^2}{5x^4 - 5x^2y^2} = \frac{3x^2(x^2 - y^2)}{5x^2(x^2 - y^2)} = \frac{3}{5}$

o) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$ = Buscamos el valor de x que anule el numerador ($x = -2$) y dividimos por Ruffini para descomponer en factores al denominador

$$x^2 + 5x + 6 \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & +5 & +6 \\ -2 & & -2 & -6 \\ \hline & 1 & +3 & 0 \end{array} \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x + 2)^2}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{(x + 2)(x + 2)}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{x + 2}{x + 3}$$

p) $\frac{x^2 + (a + b)x + ab}{x^2 + (a + c)x + ac} = \frac{x^2 + ax + bx + ab}{x^2 + ax + cx + ac} = \frac{x(x + a) + b(x + a)}{x(x + a) + c(x + a)} =$
 $\frac{(x + a)(x + b)}{(x + a)(x + c)} = \frac{x + b}{x + c}$

4.- Reducir a común denominador las fracciones algebraicas siguientes

El común denominador de fracciones algebraicas se obtiene calculando el **Mínimo Común Múltiplo (MCM)** de los polinomios que forman los denominadores. **Para hallarlo, se factorizan los denominadores y se multiplican todos los factores distintos, tomando los exponentes más altos.**

1.-Descomponemos los denominadores en factores para hallar el mínimo común múltiplo, que será el común denominador.

2.- Dividimos el común denominador entre los denominadores de las fracciones dadas y el resultado lo multiplicamos por el numerador de la fracción correspondiente

a) $\frac{a^3}{2b^2}$; $\frac{c^2}{3b^2a}$; $\frac{b^2}{4c^2a^3}$ mcm = $12a^3b^2c^2$

$$\frac{a^3}{2b^2} = \frac{6a^6 \cdot c^2}{12a^3b^2c^2} ; \frac{c^2}{3b^2a} = \frac{4a^2c^4}{12a^3b^2c^2} ; \frac{b^2}{4c^2a^3} = \frac{3b^4}{12a^3b^2c^2}$$

b) $\frac{5x}{x^2 - 4}$; $\frac{3x}{x^2 - 3x + 2}$; $\frac{4}{x^2 - 2x}$

Conviene escribir las fracciones con los denominadores descompuestos en factores primos para no equivocarnos al dividir.

Descomponemos los denominadores en producto de factores primos:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$x^2 - 3x + 2$ Descomponemos por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & +2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^2 - 2x = x(x - 2)$$

Hallamos el mcm de los factores obtenidos en el denominador:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2); \quad x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2); \quad x^2 - 2x = x(x - 2)$$

$$\text{mcm} = (x + 2)(x - 2)(x - 1)$$

$$\frac{5x}{(x + 2)(x - 2)}; \quad \frac{3x}{(x - 1)(x - 2)}; \quad \frac{4}{x(x - 2)}$$

$$\frac{5x(x - 1)}{(x + 2)(x - 2)(x - 1)}; \quad \frac{3x(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)(x - 1)}; \quad \frac{4(x + 2)(x - 1)}{x(x + 2)(x - 2)(x - 1)}$$

5.- Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

$$1) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}\right) \cdot \frac{5x}{4} = \frac{3 + 2}{3x} \cdot \frac{5x}{4} = \frac{5}{3x} \cdot \frac{5x}{4} = \frac{25x}{12x} = \frac{25}{12}$$

$$2) \left(\frac{x}{4y} + \frac{2}{y}\right) : \left(\frac{3}{2y} + \frac{5x}{y}\right) = \left(\frac{x + 8}{4y}\right) : \left(\frac{3 + 10x}{2y}\right) = \frac{2y(x + 8)(2y)}{4y(3 + 10x)} =$$

$$\frac{(x + 8)(2y)}{2(3 + 10x)}$$

$$3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)(x - y) = \left(\frac{y + x}{xy}\right)(x + y) + \left(\frac{y - x}{xy}\right)(x - y) =$$

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy} + \frac{-x^2 + 2xy - y^2}{xy} = \frac{4xy}{xy} = 4$$

$$4) 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x + 1}{x}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{x}{x + 1}} = 2 + \frac{1}{\frac{2x + 1}{x + 1}} = 2 + \frac{x + 1}{2x + 1} = \frac{5x + 3}{2x + 1}$$

$$5) \left(1 - \frac{a - b}{a + b}\right) : \left(\frac{2b}{a^2 - b^2}\right) = \left(\frac{a + b - a + b}{a + b}\right) : \left(\frac{2b}{a^2 - b^2}\right) = \frac{2b}{a + b} : \frac{2b}{a^2 - b^2} = \frac{2b(a + b)(a - b)}{2b(a + b)} = a - b$$

$$6) \frac{x^2 - y^2}{a^2 - 2ab + b^2} \cdot \frac{a - b}{x - b} = \frac{(x + y)(x - y)}{(a - b)^2} \cdot \frac{a - b}{x - b} = \frac{(x + y)(x - y)}{(a - b)(x - b)}$$

$$7) \left(\frac{x + 1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x - 1}{a}\right)^2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{a^2} - \frac{x^2 - 2x + 1}{a^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1}{a^2} = \frac{4x}{a^2}$$

$$8) \frac{3x + 2}{5x} + \frac{2x - 2}{5x} = \frac{5x}{5x} = 1$$

$$9) \frac{3x + 2}{5x} - \frac{2x - 2}{5x} = \frac{3x + 2 - 2x + 2}{5x} = \frac{x + 4}{5x}$$

$$10) \frac{3ax^2}{5y^2} : \frac{3ax^2}{10y^2} = \frac{3ax^2 \cdot 10y^2}{5y^2 \cdot 3ax^2} = 2$$

$$11) \frac{3x-5}{x^2-9} : \frac{3x-5}{x+3} = \frac{(3x-5)(x+3)}{(x^2-9)(3x-5)} = \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

$$12) \left(\frac{2a}{a-3} + 2a \right) : \left(\frac{5a}{a^2-9} + a \right) = \left(\frac{2a+2a(a-3)}{a-3} \right) : \left(\frac{5a+a(a^2-9)}{(a+3)(a-3)} \right) =$$

$$\frac{2a+2a^2-6a}{a-3} : \frac{(5a+a^3-9a)}{(a+3)(a-3)} = \frac{2a^2-4a}{a-3} : \frac{a^3-4a}{(a+3)(a-3)} = \frac{2a(a-2)}{a-3} : \frac{a(a^2-4)}{(a+3)(a-3)} =$$

$$\frac{2a(a-2)(a+3)(a-3)}{(a-3) \cdot a \cdot (a+2)(a-2)} = \frac{2(a+3)}{a+2}$$

$$13) \left(1 - \frac{x}{y} \right) : \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) = \frac{y-x}{y} : \frac{x^2-y^2}{xy} = \frac{xy(y-x)}{y(x^2-y^2)} = \frac{xy(y-x)}{y(x+y)(x-y)} = \frac{-xy(-y+x)}{y(x+y)(x-y)} = -\frac{x}{x+y}$$

14) $\frac{2x}{x^2-4} + \frac{3}{x^2-3x-2} - \frac{x+3}{x+2}$ Descomponemos en factores los denominadores para hallar el mcm

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$x^2 - 3x + 2 =$ probamos con las posibles raíces (divisores) que anulan al termino independiente, en este caso el 2, y que son +1, -1, +2, -2

Vemos que los valores 1 y 2 anulan el valor del polinomio.

Dividimos por Ruffini haciendo que $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & +2 \\ 1 & & +1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

mcm de $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$; $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ y de $x + 2$ es:

$$(x + 2)(x - 2)(x - 1)$$

$$\frac{2x}{x^2-4} + \frac{3}{x^2-3x-2} - \frac{x+3}{x+2} = \frac{2x(x-1) + 3(x+2) - (x+3)(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 3x + 6 - (x^3 - 7x + 6)}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{2x^2 - 2x + 3x + 6 - x^3 + 7x - 6}{(x+2)(x-2)(x-1)} =$$

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + 8x}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{x(-x^2 + 2x + 8)}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{x(-x+4)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-1)} =$$

$$\frac{x(-x+4)}{(x-2)(x-1)}$$

$$15) 1 - \left(\frac{x+y}{x-y} \right) : \left(\frac{x^2-y^2}{2xy} \right) = 1 - \frac{(x+y) \cdot 2xy}{(x-y) \cdot (x+y)(x-y)} = 1 - \frac{2xy}{(x-y)(x-y)} =$$

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2 - 2xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - 4xy + y^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$16) \frac{9}{b+2} - \frac{4}{b-3} = \frac{9(b-3)}{(b+2)(b+3)} - \frac{4(b+2)}{(b+2)(b+3)} = \frac{9(b-3) - 4(b+2)}{(b+2)(b+3)} =$$

$$\frac{9b - 27 - 4b - 8}{(b+2)(b+3)} = \frac{5b - 35}{(b+2)(b+3)}$$

$$17) \frac{10}{x-3} - \frac{2}{x+4} = \frac{10(x+4) - 2(x-3)}{(x-3)(+4)} = \frac{10x + 40 - 2x + 6}{(x-3)(+4)} = \frac{8x + 46}{(x-3)(+4)} = \frac{2(4x + 23)}{(x-3)(+4)}$$

$$18) \frac{3}{x} + \frac{2}{-x} = \frac{3}{x} + \frac{-2}{x} = \frac{1}{x}$$

$$19) \frac{1}{a-2} - \frac{3}{a^2-4} + \frac{2}{a+2} \quad \text{mcm} = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$$

$$\frac{1(a+2) - 3 + 2(a-2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{a+2-3+2a-4}{(a+2)(a-2)} = \frac{3a-5}{(a+2)(a-2)}$$

$$20) \frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} = \frac{(x+2y)(x+2y) - (x-2y)(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)} =$$

$$\frac{(x^2 + 4xy + y^2) - (x^2 - 4xy + y^2)}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{x^2 + 4xy + y^2 - x^2 + 4xy - y^2}{(x-2y)(x+2y)} =$$

$$= \frac{8xy}{(x-2y)(x+2y)}$$

$$21) \frac{3a}{a-1} - 6 + \frac{3a}{a+1} = \frac{3a(a+1) - 6(a+1)(a-1) + 3a(a-1)}{(a+1)(a-1)} =$$

$$\frac{3a^2 + 3a - 6(a^2 - 1) + 3a^2 - 3}{(a+1)(a-1)} = \frac{3a^2 + 3a - 6a^2 + 6 + 3a^2 - 3}{(a+1)(a-1)}$$

$$\frac{3a+3}{(a+1)(a-1)} = \frac{3(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{3}{a-1}$$

$$22) \frac{1}{1-2x} - \frac{2x}{1-4x^2} = \frac{1}{1-2x} - \frac{2x}{(1+2x)(1-2x)} \quad \text{mcm} = (1+2x)(1-2x)$$

$$\frac{1(1+2x) - 2x}{(1+2x)(1-2x)} = \frac{1+2x-2x}{(1+2x)(1-2x)} = \frac{1}{(1+2x)(1-2x)}$$

$$23) \frac{3a}{9a^2-4b^2} - \frac{1}{3a+2b} = \frac{3a}{(3a+2b)(3a-2b)} - \frac{1}{3a+2b} =$$

$$\frac{3a - 1(3a-2b)}{(3a+2b)(3a-2b)} = \frac{3a - 3a + 2b}{(3a+2b)(3a-2b)} = \frac{2b}{(3a+2b)(3a-2b)}$$

$$24) \frac{2x^2 - x - 1}{2x^2 + 5x + 2} \cdot \frac{4x^2 + x - 14}{16x^2 - 49}$$

Descomponemos factorialmente las expresiones algebraicas normalmente aplicando las identidades notables o la división por Ruffini

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$$

$$2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$$

$$4x^2 + x - 14 = (4x - 7)(x + 2)$$

$$16x^2 - 49 = (4x - 7)(4x + 7)$$

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{(2x+1)(x+2)} \cdot \frac{(4x-7)(x+2)}{(4x-7)(4x+7)} = \frac{(2x+1)(x-1)(4x-7)(x+2)}{(2x+1)(x+2)(4x-7)(4x+7)} =$$

$$\frac{x-1}{4x+7}$$

$$25) \frac{c^2 - d^2}{4c^2} : \frac{c^2 - 2cd + d^2}{2d^2} = \frac{(c + d)(c - d)}{4c^2} = \frac{(c - d)(c - d)}{2d^2} =$$

$$\frac{(c + d)(c - d) 2d^2}{4c^2(c - d)(c - d)} = \frac{d^2(c + d)}{2c^2(c - d)}$$

$$26) \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} : \frac{a - b}{4a + 4b} = \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a + b)} : \frac{a - b}{4(a + b)} = \frac{(a + b)(a - b)4(a + b)}{(a + b)(a + b)(a - b)} = 4$$

$$27) (x + y) : \frac{x^2 - y^2}{y} = \frac{(x + y)y}{(x + y)(x - y)} = \frac{y}{x - y}$$

$$28) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \frac{xy + y^2}{x^2 - xy} = \frac{(x + y)(x - y)}{(x + y)(x + y)} \cdot \frac{y(x + y)}{x(x - y)} = \frac{y}{x}$$

$$29) \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} : \frac{x^2 - 2x}{x^3 - x}$$

Descomponemos por Ruffini $x^2 - 3x + 2$

1	-3	+2	$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
2	2	-2	
1	-1	0	

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} : \frac{x^2 - 2x}{x^3 - x} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} : \frac{x(x - 2)}{x(x^2 - 1)} = \frac{x + 2}{x - 1} : \frac{(x - 2)}{(x^2 - 1)} =$$

$$\frac{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x - 2)}$$

$$30) \frac{14x^2 - 7x}{12x^2 + 24x} : \frac{2x - 1}{x^2 + 2x} = \frac{7x(2x - 1)}{12x(x + 2)} : \frac{2x - 1}{x(x + 2)} = \frac{7(2x - 1) \cdot x \cdot (x + 2)}{12(x + 2)(2x - 1)} =$$

$$\frac{7x}{12}$$

$$31) \frac{a^2b^2 + 3ab}{4a^2 - 1} : \frac{ab + 3}{2a + 1} = \frac{ab(ab + 3)}{(2a + 1)(2a - 1)} : \frac{ab + 3}{(2a + 1)} =$$

$$\frac{ab(ab + 3)(2a + 1)}{(2a + 1)(2a - 1)(ab + 3)} = \frac{ab}{2a - 1}$$

$$32) \frac{a^2 - 121}{a^2 - 4} : \frac{a + 11}{a + 2} = \frac{(a + 11)(a - 11)}{(a + 2)(a - 2)} : \frac{a + 11}{a + 2} = \frac{(a + 11)(a - 11)(a + 2)}{(a + 2)(a - 2)(a + 11)} =$$

$$\frac{a - 11}{a - 2}$$

$$33) \frac{2x^2 + 13x + 15}{4x^2 - 9} : \frac{2x^2 + 11x + 5}{4x^2 - 1} = \frac{(2x + 3)(x + 5)}{(2x + 3)(2x - 3)} : \frac{(2x + 1)(x + 5)}{(2x + 1)(2x - 1)} =$$

$$\frac{2x - 1}{2x - 3}$$

$$34) \frac{x^3 - 6x^2 + 36x}{x^2 - 49} : \frac{x^4 + 216}{x^2 - x - 42} = \frac{x(x^2 - 6x + 36)}{(x + 7)(x - 7)} : \frac{x(x - 6)(x^2 - 6x + 36)}{(x - 7)(x + 6)} =$$

$$\frac{x(x^2 - 6x + 36)(x - 7)(x + 6)}{x(x^2 - 6x + 36)(x + 6)(x + 7)(x - 7)} = \frac{1}{x^7}$$

$$35) \frac{2y}{(x - 2y)^2} + \frac{1}{(x - 2y)} = \frac{2y + (x - 2y)}{(x - 2y)^2} = \frac{x}{(x - 2y)(x - 2y)}$$

36) $\frac{x}{x^2 - y^2} + \frac{y}{y^2 - x^2}$ = multiplicamos por (-1) a ambos miembros de la segunda fracción para igualar los denominadores.

$$\frac{x}{x^2 - y^2} + \frac{y}{y^2 - x^2} = \frac{x}{x^2 - y^2} + \frac{(-1)(y)}{(-1)(y^2 - x^2)} = \frac{x}{x^2 - y^2} + \frac{-y}{(x^2 - y^2)}$$

$$= \frac{x - y}{(x + y)(x - y)} = \frac{1}{x + y}$$

$$37) \frac{4}{x - 4} - \frac{16 - 3x}{x^2 - 16} = \frac{4}{x - 4} - \frac{16 - 3x}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{4(x + 4)}{(x + 4)(x - 4)} - \frac{16 - 3x}{(x + 4)(x - 4)}$$

$$\frac{4x + 16 - 16 + 3x}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{7x}{(x + 4)(x - 4)}$$

$$38) \frac{x - y}{x^2 - y^2} + \frac{1}{2x + 3y} = \frac{x - y}{(x + y)(x - y)} + \frac{1}{2x + 3y} = \frac{1}{x + y} + \frac{1}{2x + 3y} =$$

$$\frac{2x + 3y}{(x + y)(2x + 3y)} + \frac{x + y}{(x + y)(2x + 3y)} = \frac{3x + 4y}{(x + y)(2x + 3y)}$$

39) $\frac{1}{y - x} + \frac{x}{(x - y)^2}$ Multiplicamos por (-1) a ambos miembros de la primera fracción para conseguir el mismo signo de las indeterminadas

$$\frac{(-1)1}{(-1)(y - x)} + \frac{x}{(x - y)^2} = \frac{-1}{(x - y)} + \frac{x}{(x + y)(x - y)} =$$

$$\frac{-1(x + y)}{(x + y)(x - y)} + \frac{x}{(x + y)(x - y)} = \frac{-x - y + x}{(x + y)(x - y)} = \frac{-y}{(x + y)(x - y)}$$

40) $\frac{a - b}{c - d} - \frac{b - a}{d - c}$ Multiplicamos por (-1) a ambos miembros de la segunda fracción para igualar los denominadores.

$$\frac{a - b}{c - d} - \frac{(-1)(b - a)}{(-1)(d - c)} = \frac{a - b}{c - d} - \frac{a - b}{c - d} = \frac{a - b - a + b}{c - d} = \frac{0}{c - d} = 0$$

41) $\frac{2a - b}{c - d} - \frac{a - 2b}{d - c}$ Multiplicamos por (-1) a ambos miembros de la segunda fracción para igualar los denominadores.

$$\frac{2a - b}{c - d} - \frac{(-1)(a - 2b)}{(-1)(d - c)} = \frac{2a - b}{c - d} - \frac{(-a + 2b)}{(-d + c)} = \frac{2a - b + a - 2b}{c - d} = \frac{3a - 3b}{c - d}$$

$$= \frac{3(a - b)}{c - d}$$

$$42) \frac{a^2 m}{b^2 c} \cdot \frac{x^3}{a^3} \cdot \frac{ac^2}{mx^2} = \frac{a^3 c^2 mx^3}{a^3 b^2 cmx^2} = \frac{cx}{b^2}$$

$$43) \frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 - 9} \cdot \frac{a - 3}{a + 4} = \frac{(a + 4)^2}{(a + 3)(a - 3)} \cdot \frac{a - 3}{a + 4} = \frac{a + 4}{a + 3}$$

$$44) \frac{x^2 - 4a^2}{ax + 2a^2} \cdot \frac{2a}{x - 2a} = \frac{(x + 2a)(x - 2a)2a}{a(x + 2a)(x - 2a)} = 2$$

$$45) \frac{16x^2 - 9a^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{x - 2}{4x - 3a} = \frac{(4x + 3a)(4x - 3a)}{(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{x - 2}{4x - 3a} = \frac{4x + 3a}{x + 2}$$

$$46) \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x + 2}{x - 1}$$

$$47) \frac{b^4 - 27b}{2b^2 + 5b} \cdot \frac{4b^2 - 25}{2b^2 - 11b + 15} = \frac{b(b^3 - 27)}{b(2b + 5)} \cdot \frac{(2b + 5)(2b - 5)}{(2b - 5)(b - 3)} =$$

$$\frac{(b^2 + 3b + 9)(b - 3)}{2b + 5} \cdot \frac{(2b + 5)(2b - 5)}{(2b - 5)(b - 3)} = b^2 + 3b + 9$$

48) Simplifica la siguientes fracciones algebraicas

$$a) \frac{x^2}{x^2 - xy} = \frac{x^2}{x(x - y)} = \frac{x}{x - y}$$

$$b) \frac{3ax}{3ax^2 - 3axy} = \frac{3ax}{3ax(a - y)} = \frac{1}{a - y}$$

$$c) \frac{6a^2 - 9ab}{8ab - 12b^2} = \frac{3a(2a - 3b)}{4b(2a - 3b)} = \frac{3a}{4b}$$

$$d) \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x}{x - 3}$$

$$e) \frac{3x - x^2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(3 - x)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x}{x - 2} \cdot (-1) = \frac{-x}{x - 2}$$

$$f) \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{x + 2}{x + 3}$$

$$g) \frac{1 + 3x + 2x^2}{1 - 2x - 3x^2} = \frac{(x + 1)(2x + 1)}{(x + 1)(-3x + 1)} = \frac{2x + 1}{-3x + 1}$$

$$h) \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3} = \frac{(a + b)(a - b)}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{(a + b)}{a^2 + ab + b^2}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & +6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & +6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & +5 & +6 \\ -2 & & -2 & -6 \\ \hline & 1 & +3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 3 & 1 \\ -1 & & -2 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & -3 & -2 & 1 \\ -1 & & 3 & -1 \\ \hline & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$i) \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

	1	-3	2
1		1	-2
	1	-2	0

$$j) \frac{3x+1}{9x^2-1} = \frac{3x+1}{(3x+1)(3x-1)} = \frac{1}{3x-1}$$

	1	-1	-2
-1	1	-1	2
	1	-2	0

$$k) \frac{x^3y - xy^3}{x^2y - xy^2} = \frac{xy(x^2 - y^2)}{xy(x-y)} = \frac{(x+y)(x-y)}{x-y} = x + y$$

$$l) \frac{ax+by}{ax^2+bxy} = \frac{ax+by}{x(ax+by)} = \frac{1}{x}$$

$$m) \frac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab} = \frac{a(c+d)+b(c+d)}{a(a+b)} = \frac{(a+b)(c+d)}{a(a+b)} = \frac{c+d}{a}$$

$$n) \frac{ab-2a-3b+6}{ab-2a} = \frac{a(b-2)-3(b-2)}{a(b-2)} = \frac{(b-2)(a-3)}{a(b-2)} = \frac{a-3}{a}$$

49) Halla el verdadero valor de las siguientes fracciones algebraicas:

$$a) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} \text{ para } x = 2$$

Simplificamos la fracción descomponiendo en factores primos por Ruffini (x-2).

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

	1	-6	+8
2		2	-8
	1	-4	0

	1	-5	+6
2		2	-6
	1	-3	0

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

Hallamos el valor numérico de esta fracción simplificada

$$\frac{x-3}{x-4} = \frac{2-3}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \text{ es el verdadero valor}$$

$$b) \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 5x + 6} \text{ para } x = -2$$

Descomponemos en factores aplicando la división por Ruffini

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

	1	-1	-6
-2		-2	+6
	1	-3	0

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

	1	+5	+6
-2		-2	-6
	1	+3	0

Hallamos el valor numérico para $x = -2$ de la fracción simplificada:

$$\frac{x-3}{x+3} = \frac{-2-3}{-2+3} = \frac{-5}{+1} = -5 \text{ es el verdadero valor.}$$

c) $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ para $x = 1$

Descomponemos por Ruffini

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2-2x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)(x-1)} = \frac{x+1}{(x-1)}$$

Sustituyendo en la fracción irreducible $x = 1$ resulta:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} \text{ (INDETERMINACIÓN)}$$

	1	-1	-1	+1
1		+1	0	-1
	1	0	-1	0

	1	-3	+3	-1
1		1	-2	+1
	1	-2	+1	0

d) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ para $x = 3$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

Sustituyendo el valor de x por 3 en la fracción irreducible resulta:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ es el verdadero valor.}$$

	1	-4	+3
3		3	-3
	1	-1	0

	1	-2	-3
3		3	+3
	1	+1	0

50) Reduce a común denominador las siguientes fracciones algebraicas

a) $\frac{3ax}{a^2-x^2}; \frac{4x^2}{a^2-ax}; \frac{a^2x}{ax(a-x)} = \frac{3ax}{(a+x)(a-x)}; \frac{4x^2}{a(a-x)}; \frac{a^2x}{ax(a-x)}$
 mcm: $ax(a+x)(a-x)$

$$\frac{3a^2x^2}{ax(a+x)(a-x)}; \frac{4x^3(a+x)}{ax(a+x)(a-x)}; \frac{a^2x(a+x)}{ax(a+x)(a-x)}$$

b) $\frac{4}{x^2-2x}; \frac{2x}{x^2-3x+2}; \frac{3}{x^2-1}; \frac{5}{x-2}$

$$\frac{4}{x(x-2)}; \frac{2x}{(x-1)(x-2)}; \frac{3}{(x+1)(x-1)}; \frac{5}{x-2}$$

mcm: $x(x+1)(x-1)(x-2)$

$$\frac{4(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)(x-2)}; \frac{2x^2(x+1)}{x(x+1)(x-1)(x-2)}; \frac{3x(x-2)}{x(x+1)(x-1)(x-2)}; \frac{5x(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)(x-2)}$$

c) $\frac{4}{x(x-2)}; \frac{2x}{(x-1)(x-2)}; \frac{3}{(x+1)(x-1)}; \frac{5}{x-2}$

mcm: $x(x+1)(x-1)(x-2)$

$$\frac{4(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)(x-2)}; \frac{2x^2(x+1)}{x(x+1)(x-1)(x-2)}; \frac{3x(x-2)}{x(x+1)(x-1)(x-2)}; \frac{5x(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)(x-2)}$$

51) Efectúa las siguientes operaciones algebraicas:

a) $\frac{3x}{x^2 - 4} + \frac{5x}{x - 2} + \frac{3 + x}{x + 2} = (\text{mcm: } x^2 - 4)$

$$\frac{3x}{x^2 - 4} + \frac{5x(x+2)}{x^2 - 4} + \frac{(3+x)(x-2)}{x^2 - 4} = \frac{3x + 5x^2 + 10x + x^2 + x - 6}{(x+2)(x-2)} = \frac{6x^2 + 14x - 6}{(x+2)(x-2)}$$

b) $\frac{3x}{x^2 - x} - \frac{x-1}{x^2 - 4} + \frac{3x+2}{x^2 - 3x+2}$ Reducimos a común denominador

$$x^2 - x = x(x-1)$$

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$\text{mcm: } x(x-1)(x+2)(x-2)$$

$$\frac{3x(x+2)(x-2)}{x(x-1)(x+2)(x-2)} - \frac{(x-1) \cdot x \cdot (x-1)}{x(x-1)(x+2)(x-2)} + \frac{(3x+2) \cdot x \cdot (x+2)}{x(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{3x^3 - 12x}{x(x-1)(x+2)(x-2)} - \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x(x-1)(x+2)(x-2)} + \frac{3x^3 + 8x^2 + 4x}{x(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{3x^3 - 12x - (x^3 - 2x^2 + x) + 3x^3 + 8x^2 + 4x}{x(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{3x^3 - 12x - x^3 + 2x^2 - x + 3x^3 + 8x^2 + 4x}{x(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{5x^3 + 10x^2 - 9x}{x(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{x(5x^2 + 10x - 9)}{x(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{(5x^2 + 10x - 9)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$

c) $\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{x^3}{(x+1)} + x^2 + 1$ mcm: $x^2 - 1$

$$\frac{1 - x^3(x-1) + x^2(x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)}{x^2 - 1} = \frac{1 - x^4 + x^3 + x^4 - x^2 + x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^3}{(x+1)(x-1)}$$

d) $\frac{2x}{x^2 - 4} + \frac{3}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x+3}{x+2}$

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x+2$$

$$\text{mcm: } (x-1)(x+2)(x-2)$$

$$\frac{2x(x-1) + 3(x+2) - (x+3)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2 - 2 + 3x + 6 - (x^3 - 7x - 6)}{(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{2x^2 - 2 + 3x + 6 - (x^3 - 7x - 6)}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2 - 2 + 3x + 6 - x^3 + 7x + 6}{(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{2x^2 - 2x + 3x + 6 - x^3 + 7x - 6}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 8x}{(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + 8x}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{x(-x^2 + 2x + 8)}{(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 1 & -3 & +2 \\ 1 & & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 1 & -3 & +2 \\ 1 & & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & & 0 \end{array}$$

$$\frac{x(-x^2 + 2x + 8)}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+2)(-x+4)}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{x(-x+4)}{(x-1)(x-2)}$$

-2	-1	+2	+8
		+2	-8
	-1	+4	0

$$\text{e) } \frac{9}{b+2} - \frac{4}{b-3} = \frac{9(b-3) - 4(b+2)}{(b+2)(b-3)} = \frac{9b - 27 - 4b - 8}{(b+2)(b-3)} = \frac{5b - 35}{(b+2)(b-3)} = \frac{5(b-7)}{(b+2)(b-3)}$$

$$\text{f) } \frac{1}{a-2} - \frac{3}{a^2-4} + \frac{2}{a+2} = \frac{a+2-3+2(a-2)}{a^2-4} = \frac{a+2-3+2a-4}{a^2-4} = \frac{3a-5}{(a+2)(a-2)}$$

$$\text{g) } \frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} = \frac{(x+2y)(x+2y)}{x^2-y^2} - \frac{(x-2y)(x-2y)}{x^2-y^2} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} =$$

$$\frac{(x^2+4xy+y^2) - (x^2-4xy+y^2)}{x^2-y^2} = \frac{x^2+4xy+y^2-x^2+4xy-y^2}{x^2-y^2} = \frac{8xy}{x^2-y^2}$$

$$\text{h) } \frac{10}{x-3} - \frac{2}{x+4} = \frac{10(x+4) - 2(x-3)}{(x-3)(x+4)} = \frac{10x+40-2x+6}{(x-3)(x+4)} = \frac{8x+46}{(x-3)(x+4)} = \frac{2(4x+23)}{(x-3)(x+4)}$$

$$\text{i) } \frac{3}{x} + \frac{2}{-x} = \frac{3}{x} + \frac{-2}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{j) } \frac{3a}{a-1} - 6 + \frac{3a}{a+1} = \frac{3a(a+1)}{(a-1)(a+1)} - \frac{6(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)} + \frac{3a(a-1)}{(a-1)(a+1)} =$$

$$\frac{3a^2+3a}{(a-1)(a+1)} - \frac{6a^2-6}{(a-1)(a+1)} + \frac{3a^2-3}{(a-1)(a+1)} = \frac{3a^2+3a-6a^2+6+3a^2-3}{(a-1)(a+1)} =$$

$$\frac{3a+3}{(a-1)(a+1)} = \frac{3(a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{3}{a-1}$$

$$\text{k) } \frac{1}{1-2x} - \frac{2x}{1-4x^2} = \frac{1(1+2x)}{1-4x^2} - \frac{2x}{1-4x^2} = \frac{1+2x-2x}{(1+2x)(1-2x)} - \frac{1}{(1+2x)(1-2x)}$$

