ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (CUADRÁTICA)

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a toda ecuación que puede escribirse en forma reducida así:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

x es la incógnita, a, b son los coeficientes de x y c es el término independiente, siendo $a \neq 0$.

Cuando tiene todos sus términos se llama completa, si falta alguno incompleta:

a) $ax^2 = 0$ $\Rightarrow$ b= 0 y c= 0 (ecuación completa)

b) $ax^2 + bx = 0$ $\Rightarrow$ c= 0

(ecuaciones incompletas)

c) $ax^2 + c = 0$ $\Rightarrow$ b=0

Los valores de x que anulan la ecuación (que hacen que su valor sea 0) son las soluciones o raíces.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

a) $ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{a}$; $x = \sqrt{\frac{0}{a}} = 0$

En este caso la raíz es siempre 0

b) $ax^2 + bx = 0$

$$x(ax + b) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

En este caso hay dos raíces: x = 0

$$\mathbf{x_1 = \frac{-b}{a}}$$

c) $ax^2 + c = 0$

$x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

Soluciones o raíces

- **a) si** $\frac{-c}{a} > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
- **b) si** $\frac{-c}{a} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$
- **c) si** $\frac{-c}{a} < 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\textbf{número negativo}}$ **(no tiene solución real)**

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO COMPLETA

Partimos de la fórmula general de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Multiplicando a los dos miembros por 4a resulta:

$$4a\,(ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Efectuamos la transposición del termino 4ac

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumamos b^2 a ambos miembros para completar un trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro (recuerda identidades notables)

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer miembro es el resultado de desarrollar $(2ax + b)^2$, por tanto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Sacamos la raíz cuadrada a ambos miembros

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

De donde nos queda:

$$(2ax + b) = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Despejando la incógnita x resulta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(El signo ± se refiere a que toda raíz cuadrada tiene dos soluciones una positiva y otra negativa)

Ej: $\sqrt{4} = \pm 2$ porque $\left(\sqrt{4}\right)^2 = (\pm 2)^2$

NATURALEZA DE LAS RAÍCES

Al binomio ($b^2 - 4ac$) se le llama **discriminante** porque sirve para determinar la naturaleza de las raíces

a) Si ($b^2 - 4ac$) > 0 l**a ecuación tiene dos soluciones reales y distintas**

b) si ($b^2 - 4ac$) = 0 la ecuación tiene dos soluciones reales e iguales, es decir **tiene una única solución:**

$$x = x_1 = \frac{-b}{2a}$$

c) si ($b^2 - 4ac$) < 0 **la ecuación no tiene solución real sino imaginaria** ya que la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución.

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

a) Suma de las soluciones o raíces de la ecuación de segundo grado

La suma de las soluciones de la ecuación de segundo grado es igual al coeficiente de x, cambiado de signo, dividido por el coeficiente de x^2

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$+$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

b) Producto de las soluciones o raíces de la ecuación de segundo grado.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

(esto es una suma por su diferencia de un binomio es igual a la diferencia de cuadrados)

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

De donde resulta que $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual al término independiente dividido por el coeficiente de x^2.

DETERMONACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO PARTIENDO DE SUS SOLUCIONES

Partimos de la forma general de una ecuación de segundo grado

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

Para que el término eliminar el coeficiente a del término x^2 dividimos toda la ecuación entre a (siempre que a ≠ 0)

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sabemos que S (suma) $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ y que P (producto) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$S = \frac{-b}{a} \quad \text{y} \quad P = \frac{c}{a}$$

$De\ S = \frac{-b}{a}$ multiplicando por (-1) a ambos miembros obtenemos: $-S = \frac{b}{a}$

Sustituyendo estos valores en: $x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ obtenemos:

$$\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$$

En resumen $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ es la fórmula general de la ecuación de segundo grado, mientras que $\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$ es la fórmula equivalente que nos permite hallar la fórmula general en función de la suma de sus raíces ($S = -\frac{b}{a}$) y su producto $\left(P = \frac{c}{a}\right)$

DESCOMPOSICIÓN DE UN TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO EN PRODUCTO DE FACTORES

$$\boldsymbol{Si\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \to b = -a(x_1 + x_2)}$$

$$Si\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \to c = a(x_1 \cdot x_2)$$

Podemos establecer la siguiente igualdad:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - \boldsymbol{a(x_1 + x_2)}x + a(x_1 \cdot x_2)$$

Si seguimos operando:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - \boldsymbol{ax_1}x - ax_2x + a(x_1 \cdot x_2)$$
$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2)$$
$$ax^2 + bx + c = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)]$$
$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)}$$